• Si $r \neq 1$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^r} = \lim_{\alpha \to 0+} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x^r} = \lim_{\alpha \to 0+} \int_\alpha^1 x^{-r}\, dx$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left[\frac{1}{1-r} x^{1-r} \right]_\alpha^1$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left(\frac{1}{1-r} - \frac{\alpha^{1-r}}{1-r} \right) = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{si } 1-r>0 \Leftrightarrow r<1 \\ +\infty & \text{si } 1-r<0 \Leftrightarrow r>1 \end{cases}$$

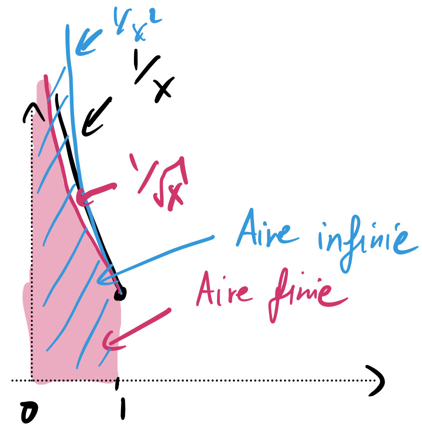
$$(x^{1-r})' = (1-r)\cdot x^{1-r-1} = (1-r)\cdot x^{-r}$$

• Si $r = 1$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \to 0+} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left[\log(x) \right]_\alpha^1$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left(0 - \log(\alpha) \right) = +\infty$$



2) Calculer l'intégrale : $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$

⚠ Fausse piste : $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = \left[\frac{1}{-3} x^{-3} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$ Faux !

→ La fonction n'est continue sur $[-1, 1]$ donc on ne peut appliquer le Thm. fondamental du calcul intégral.

En fait : $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = \int_{-1}^{0-} \frac{dx}{x^4} + \int_{0+}^1 \frac{dx}{x^4} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{x^4} = +\infty$

fin cours 19/12

3) $$\int_{0+}^1 \log(x)\, dx = \lim_{\alpha \to 0+} \int_\alpha^1 \log(x)\, dx$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+} \left[x \log(x) - x \right]_\alpha^1$$

$$= -1 - \lim_{\alpha \to 0+} \left(\alpha \log(\alpha) - \alpha \right) = -1$$

$$\left(\lim_{\alpha \to 0+} \alpha \log \alpha = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{\log(\alpha)}{1/\alpha} \overset{B.H\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\alpha \to 0+} \frac{1/\alpha}{-1/\alpha^2} = \lim_{\alpha \to 0+} -\alpha = 0 \right)$$

Rmk : On peut utiliser le critère de comparaison pour montrer qu'une intégrale diverge (sans trouver une primitive).

Ex : $\int_0^1 \frac{\log(x)}{x}\,dx$.

Comme $\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty$, $\exists c \in]0,1[$ t.q $\log(x) < -1, \forall x \in]0,c]$

Donc $\forall x \in]0,c]$ $\frac{\log(x)}{x} < \frac{-1}{x}$. or $\int_0^c \frac{-1}{x}\,dx \overset{\text{diverge}}{=} -\infty$

Donc par comparaison $\int_0^1 \frac{\log(x)}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^c \frac{\log x}{x}\,dx}_{= -\infty \text{ par le critère de comparaison.}} + \int_c^1 \frac{\log(x)}{x}\,dx \overset{\text{diverge}}{=} -\infty$

$\boxed{\text{Type 2}}$: • Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue.

On définit $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)\,dx$

• De même, si $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ continue

On définit $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{M\to-\infty} \int_M^b f(x)\,dx$

Exemple : • $f(x) = \frac{1}{x^r}$, $r \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^r} = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^r}$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{1}{1-r} \cdot x^{1-r}\right]_1^M$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{1-r}\left(M^{1-r} - 1\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } r < 1 \\ \frac{-1}{1-r} = \frac{1}{r-1} & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

• Si $r = 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{dx}{x}$$

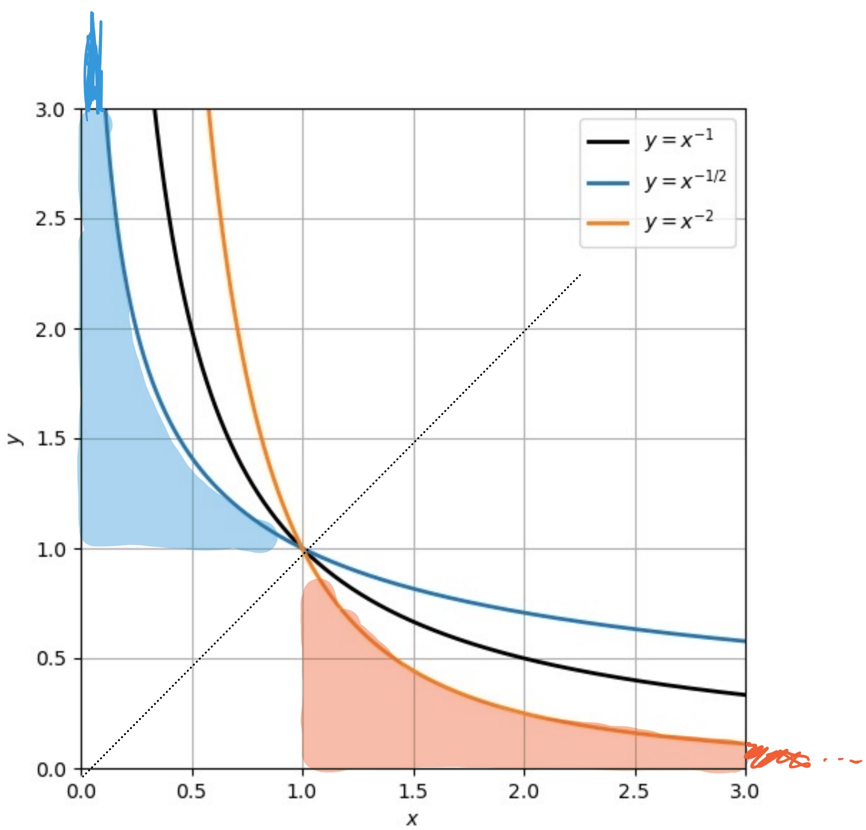
$$= \lim_{M \to +\infty} \left[\log(x) \right]_1^M$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \left(\log(M) - \log(1) \right)$$

$$= +\infty$$

Résumé :

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^r} = \begin{cases} +\infty & \text{si } r \geqslant 1 \\ \dfrac{1}{1-r} & \text{si } r < 1 \end{cases} \\[2em] \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^r} = \begin{cases} +\infty & \text{si } r \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{r-1} & \text{si } r > 1 \end{cases} \end{array}}$$



Rmq : Les fonctions :

$$\left|\begin{array}{l}]0,1] \to [1,+\infty[\\ x \mapsto \frac{1}{x^{r}} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left|\begin{array}{l} [1,+\infty[\to]0,1] \\ x \mapsto \frac{1}{x^{1/r}} \end{array}\right.$$

sont des fonctions réciproques $\left(y = \frac{1}{x^{r}} \iff \frac{1}{y} = x^{r} \iff x = \frac{1}{y^{1/r}}\right)$

$$\text{Aire en bleu} = \int_0^1 \frac{1}{x^{r}}\,dx - 1 \qquad \text{avec } r = \tfrac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{1-r} - 1$$
$$= \frac{r}{1-r}$$
$$= \frac{1}{1/r - 1} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/r}}\,dx = \text{aire en orange}$$

Continuons avec d'autres exemples :

(ii) $$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \underbrace{\left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty}}_{\text{signifie } \lim_{x\to+\infty}(-e^{-x}) - \lim_{x\to 1}(-e^{-x})} = 0 - \left(\frac{-1}{e}\right) = \frac{1}{e}$$

(iii) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{M\to-\infty} \int_M^0 \frac{dx}{1+x^2}$$

⚠ Il faut que les 2 limites existent pour que l'intégrale existe.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= 2 \lim_{M\to+\infty} \left[\arctan(x)\right]_0^M$$
$$= 2 \lim_{M\to+\infty} \arctan(M) - 2\arctan(0)$$
$$= 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \pi$$

⚠ On ne peut pas écrire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} f(t)\,dt$

Contre exemple : $\int_{-M}^{M} \sin(t)\,dt = 0$, $\forall M>0$ car sin est impaire

Mais $\lim_{M\to+\infty} \int_0^M \sin(t)\,dt = \lim_{M\to+\infty} \left[-\cos(t)\right]_0^M$

$= \lim_{M\to+\infty} (-\cos(M)) + 1$ n'existe pas

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\,dt$ n'existe pas.

$\boxed{\text{Type 3}}$: combinaison du type 1 et du type 2.

Soit $f :]a,+\infty[$ continue.

On définit $\int_{a+}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{a+}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ où $c \in]a,+\infty[$ et arbitraire.

$= \lim_{\alpha\to a+} \lim_{M\to+\infty} \int_\alpha^M f(x)\,dx$

$= \lim_{M\to+\infty} \lim_{\alpha\to a+} \int_\alpha^M f(x)\,dx$

Exemple : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}$ continue sur $]0,+\infty[$

$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to 0+} \lim_{M\to+\infty} \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_\alpha^M$

$= \lim_{\alpha\to 0+} \lim_{M\to+\infty} \left(-2e^{-\sqrt{M}} + 2e^{-\sqrt{\alpha}}\right)$

$= 2$

fin cours 22/12