ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Analyse I

Série de révision

Automne 2017

- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
  -1 point si la réponse est incorrecte.

- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
  -1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : La limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3+3n}-\sqrt{n^3+2n^2+3}}{\sqrt{n+2}}$ vaut

- [ ] $+\infty$
- [ ] -2
- [x] -1
- [ ] 0

Question 2 : Parmi les séries numériques

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad c)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^3}{(2n)!}$$

déterminer celles qui sont convergentes :

- [x] uniquement $a)$ et $b)$
- [ ] uniquement $c)$
- [ ] uniquement $a)$
- [ ] toutes les trois

Question 3 : Soit la fonction $f\colon [-1,1]\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^{3x}-1}{\sin(2x)}$.
S'il existe, soit $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ le prolongement par continuité en 0 de f.

Alors

- [ ] g existe et $g(0) = 1$
- [ ] f n'admet pas de prolongement par continuité en 0
- [x] g existe et $g(0) = \dfrac{3}{2}$
- [ ] g existe et $g(0) = \dfrac{1}{2}$

Question 4 : La série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^4+2}(x+3)^k$ converge si, et seulement si

- [x] $x \in [-4,-2]$
- [ ] $x \in]-4,-2]$
- [ ] $x \in]2,4[$
- [ ] $x \in [2,4]$

Question 5 : Soit la fonction $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x^2 \sin\left(e^{\sqrt{x}}\right) + x$. Alors

- ☐ $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{3/2}\ e^{\sqrt{x}} \cos\left(e^{\sqrt{x}}\right) + 3x \sin\left(e^{\sqrt{x}}\right) + 1$
- ☐ $f'(x) = 3x^{3/2}\ e^{\sqrt{x}} \cos\left(e^{\sqrt{x}}\right) + 1$
- ■ $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{3/2}\ e^{\sqrt{x}} \cos\left(e^{\sqrt{x}}\right) + 6x \sin\left(e^{\sqrt{x}}\right) + 1$
- ☐ $f'(x) = 3x^{3/2}\ e^{\sqrt{x}} \cos\left(e^{\sqrt{x}}\right) + 6x \sin\left(e^{\sqrt{x}}\right)$

Question 6 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{|x|}$.
S'il existe, soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le prolongement par continuité en 0 de f.

- ■ f n'admet pas de prolongement par continuité en 0
- ☐ g existe et $g(0) = 0$
- ☐ g existe et $g(0) = -1$
- ☐ g existe et $g(0) = 1$

Question 7 : Soit la fonction $f\colon [-1,3] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\,|x-2|$. Alors

- ■ f atteint son minimum en $x = -1$, atteint son maximum en $x = 3$, admet un maximum local en $x = 1$ et admet un minimum local en $x = 2$
- ☐ f atteint son maximum en $x = 3$ et admet un minimum local en $x = 1$
- ☐ f atteint son minimum en $x = 1$, atteint son maximum en $x = 3$ et admet un minimum local en $x = 2$
- ☐ f atteint son minimum en $x = -1$ et atteint son maximum en $x = 1$

Question 8 : Pour quels choix de $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \beta x & \text{pour } x < 2 \\ \sqrt{x^2+5} + \alpha & \text{pour } x \geq 2 \end{cases}$$

est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

- ■ $\alpha = -\dfrac{5}{3}$ et $\beta = \dfrac{2}{3}$
- ☐ $\alpha = 0$ et $\beta = \dfrac{3}{2}$
- ☐ $\alpha = -\sqrt{5}$ et $\beta = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
- ☐ $\alpha = -\dfrac{8}{3}$ et $\beta = \dfrac{1}{6}$

Question 9 : Le nombre complexe $\dfrac{\mathrm{i}^{251} - e^{-\mathrm{i}\pi}}{\sqrt{2}\,\mathrm{i} - e^{\mathrm{i}\pi/4}}$ vaut

- ☐ $\mathrm{i}\sqrt{2}$
- ■ $-\sqrt{2}$
- ☐ $-\mathrm{i}\sqrt{2}$
- ☐ $-(1+\mathrm{i})\sqrt{2}$

Question 10 : Soit une suite de nombres réels (a_n) telle que $\dfrac{1}{4} \leq |a_n| \leq \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \geq 0$. Alors

- ☐ la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge
- ■ la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^n$ converge et $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^n\right| \leq 2$
- ☐ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ☐ la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^n$ diverge

Question 11 : L'équation $x\left(e^x - e^{-x}\right) - e^x = 0$

- ☐ n'a pas de solution appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$
- ☐ possède exactement une solution réelle
- ☐ n'a pas de solution appartenant à l'intervalle $]-\infty, 0[$
- ■ possède au moins deux solutions réelles

Question 12 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{e^{2x}}\, dx$ vaut

- ☐ 1
- ☐ $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}e^{-2}$
- ☐ $-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}e^{-2}$
- ■ $\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4}e^{-2}$

Question 13 : Soit la fonction bijective $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{sh}\big(\mathrm{sh}(x)\big)$ et soit $a = f(1)$. Alors la dérivée de la fonction réciproque f^{-1} de f en a vaut

- ☐ $\left(f^{-1}\right)'(a) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\big(\mathrm{sh}(1)\big)}$
- ☐ $\left(f^{-1}\right)'(a) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\big(\mathrm{sh}(a)\big)\ \mathrm{ch}(a)}$
- ■ $\left(f^{-1}\right)'(a) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\big(\mathrm{sh}(1)\big)\ \mathrm{ch}(1)}$
- ☐ $\left(f^{-1}\right)'(a) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\big(\mathrm{sh}(a)\big)\ \mathrm{ch}(1)}$

Question 14 : La limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ vaut

- ☐ $+\infty$
- ☐ 1
- ■ e^{-1}
- ☐ $-e$

Question 15 : La limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{|x|} - 1 - |x|}{x^2}$

- [ ] vaut 0
- [ ] vaut 1
- [x] vaut $\dfrac{1}{2}$
- [ ] n'existe pas

Question 16 : La partie imaginaire du nombre complexe $\dfrac{\sqrt{3}\, i^{99} - i}{\sqrt{5} + i}$ vaut

- [x] $-\dfrac{1}{6}\sqrt{5}\left(1 + \sqrt{3}\right)$
- [ ] $\dfrac{1}{6}\left(-\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)$
- [ ] $-\dfrac{1}{6}\sqrt{5}\left(1 + \sqrt{3}\right) i$
- [ ] $\dfrac{1}{6}\sqrt{5}\left(1 + \sqrt{3}\right)$

Question 17 : La limite $\lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{4}{(x-1)(x^2-1)} \right)$

- [x] vaut -1
- [ ] vaut $-\infty$
- [ ] vaut 0
- [ ] n'existe pas

Question 18 : L'équation $z^{-1} = \overline{z}$, où $\overline{z}$ est le complexe conjugué de z, admet

- [x] une infinité de solutions dans $\mathbb{C}$
- [ ] exactement une solution dans $\mathbb{C}$
- [ ] aucune solution dans $\mathbb{C}$
- [ ] exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$

Question 19 : La limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[2]{n+3}}$ vaut

- [ ] 1
- [ ] $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[2]{3}}$
- [ ] $\dfrac{2}{3}$
- [x] 0

Question 20 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{(e^x - 1)}$.
Le développement limité d'ordre 2 de f autour de $x = 0$ est

- ■ $f(x) = 1 + x + x^2 + x^2\epsilon(x)$
- □ $f(x) = 2x + x^2 + x^2\epsilon(x)$
- □ $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$
- □ $f(x) = 1 + x + 2x^2 + x^2\epsilon(x)$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

Question 21 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\mathrm{Arctg}(x)}}{x^2+1}\,dx$ vaut

- □ $\frac{2}{3}$
- ■ $\frac{\pi^{3/2}}{12}$
- □ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- □ $\frac{\pi^{3/2}}{8}$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 22 : Pour $a < b$ dans $\mathbb{R}$, soit une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b) = 0$, alors il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $f''(c) = 0$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 23 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^x |t|\, dt$.
Alors $f'(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 24 : Soit une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Alors la dérivée de f au point $y \in I$ satisfait

$$f'(y) = \lim_{x \to 0} \frac{f(y+x) - f(y)}{x}$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur tout $\mathbb{R}$. Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $f\colon\ ]0,1[\ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]0,1[$. Alors la fonction $f'\colon\ ]0,1[\ \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]0,1[$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 27 : Soit (a_n) une suite numérique et soit (b_n) la suite numérique définie par $b_n = |a_n|$. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, alors la suite (a_n) est convergente.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 28 : Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui a, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $x, y \in \mathbb{R}$, la propriété suivante :

$$|x - y| \leq 2\epsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 29 : Soit la suite (x_n) de nombres réels définie de manière récursive par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \dfrac{1 + x_n^{\,2}}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite de nombres réels (x_n) converge vers 2.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 30 : Soit A un sous-ensemble borné et non vide de $\mathbb{R}$.
Alors $\operatorname{Inf} A \in A$ et $\operatorname{Sup} A \in A$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 31 : La série numérique $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{8^k + 8^{-k}}$ est absolument convergente.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 32 : La série numérique $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3\cos(\pi k)}{k+1}$ est absolument convergente.

☐ VRAI ■ FAUX