ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Analyse I

Série de révision

Automne 2018

– Pour les questions à choix multiple, on comptera :

+3 points si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix, −1 point si la réponse est incorrecte.

– Pour les questions de type vrai-faux, on comptera :

+1 point si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix, −1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit l'intégrale

$$I = \int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-4x+4x^2}} \, \mathrm{d}x \ .$$

Alors :

- ☐ $I = \frac{1}{2} \operatorname{Log}(5)$
- ☐ $I = \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(6-\sqrt{33}\right)$
- ☐ $I = -\frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
- ☐ $I = -\frac{1}{2} \operatorname{Log}(5)$

Question 2 : Soit une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et la suite de nombre réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie récursivement par $a_0 = 1$ et $a_n = g(a_{n-1})$ pour $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Alors, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour g définie par :

- ☐ $g(x) = 2x-2$
- ☐ $g(x) = -x^2+2x-2$
- ☐ $g(x) = \frac{1}{4}x^2+1$
- ☐ $g(x) = x+1$

Question 3 : Soit la fonction $f\colon \left]-\pi,\pi\right[\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\cos(x)-1} \ -1-x^2}{\big(\sin(x)\big)^2} \ .$$

Alors :

- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{3}{2}$
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$

Question 4 : Soit la série numérique S définie par

$$S = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k .$$

Alors :

- [ ] $S = 2$
- [ ] $S = \frac{2}{5}$
- [ ] $S = -\frac{2}{5}$
- [ ] $S = \frac{3}{5}$

Question 5 : Soit $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + x^3\,\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ le développement limité d'ordre trois de la fonction $f\colon\ ]-1,1[\ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

autour de $x = 0$. Alors :

- [ ] $a_3 = 5$
- [ ] $a_3 = -\frac{1}{6}$
- [ ] $a_3 = \frac{5}{6}$
- [ ] $a_3 = 1$

Question 6 : Soit l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{0} x^2\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x .$$

Alors :

- [ ] $I = -3\mathrm{e} + 2$
- [ ] $I = \mathrm{e} - 2$
- [ ] $I = 4\mathrm{e} - 1$
- [ ] $I = 5\mathrm{e} - 2$

Question 7 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Alors :

- [ ] $\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$
- [ ] $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$
- [ ] $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$
- [ ] $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

Question 8 : Soit le nombre complexe

$$z = \frac{e^{i\pi/2} + e^{i\pi/4}}{e^{i\pi/3} + e^{i\pi/6}} \ .$$

Alors :

- ☐ $z = \frac{2}{\sqrt{3}+1}\big(\sqrt{2}+1+i\big)$
- ☐ $z = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\sqrt{3}}\,\big(3+\sqrt{2}-i\sqrt{2}\,\big)$
- ☐ $z = \frac{\sqrt{2}+1+i}{\sqrt{3}+1}$
- ☐ $z = \frac{\sqrt{2}+1-i}{\sqrt{3}+1}$

Question 9 : Soit la fonction $f\colon\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)\,e^{-x}$. Alors :

- ☐ f atteint son minimum en $x = \frac{3\pi}{2}$ et son maximum en $x = \frac{\pi}{2}$.
- ☐ f atteint son minimum en $x = 0$ en $x = \pi$ et en $x = 2\pi$.
- ☐ f atteint son minimum en $x = \frac{5\pi}{4}$ et son maximum en $x = \frac{\pi}{4}$.
- ☐ f atteint son minimum en $x = 0$ et son maximum en $x = \frac{\pi}{4}$.

Question 10 : Soit r le rayon de convergence de la série entière S, définie par

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{5^{k+3}}\, x^k \ .$$

Alors :

- ☐ $r = 0$
- ☐ $r = 5$
- ☐ $r = 25$
- ☐ $r = \frac{1}{5}$

Question 11 : Soit la fonction bijective $f\colon\,]\,0,\infty\,[\ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2 + \mathrm{Log}\left(\frac{2e+x}{x^2}\right) \ ,$$

et soit f^{-1} la fonction réciproque de f et $y_0 := f(2e)$. Alors :

- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = -\frac{4e}{3}$
- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = 2e+1$
- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = -\frac{1}{2e+1}$
- ☐ $(f^{-1})'(y_0) = \frac{3}{4e}$

Question 12 : Soit le nombre complexe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}/3}$. Alors :

- ☐ $|z| = \sqrt{2}$
- ☐ $|z| = \sqrt{2 + 2\cos(\frac{2}{3})}$
- ☐ $|z| = \sqrt{1 + \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}/3} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}/3}\right)}$
- ☐ $|z| = \sqrt{2 + 2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}/3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}/3}\right)}$

Question 13 : Soit la suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_n = \frac{\mathrm{Log}(n + \mathrm{e}^n)}{n+1} \ .$$

Alors :

- ☐ a_n est une suite bornée et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
- ☐ a_n est une suite bornée et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$
- ☐ a_n est une suite bornée et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- ☐ a_n est une suite non bornée

Question 14 : Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)(x+2) & \text{si } x < 0\,, \\ \alpha x + \beta & \text{si } x \geq 0\,, \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors :

- ☐ $f(2) = 12$
- ☐ $f(3) = 9$
- ☐ $f(-3) + f(1) = 7$
- ☐ $f'(2) = 2$

Question 15 : Soit le sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$,

$$E = \left\{ \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} .$$

Alors :

- ☐ Inf $E = -1$
- ☐ Inf $E = -1 - \sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$
- ☐ Inf $E = 0$
- ☐ Inf $E = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Question 16 : Soit l'intégrale

$$I = \int_1^{e^3} \frac{\mathrm{Log}(x)}{x\sqrt{\big(\mathrm{Log}(x)\big)^2+1}}\,\mathrm{d}x\ .$$

Alors :

- ☐ $I = \sqrt{10} - 1$
- ☐ $I = \frac{1}{2}\,(\sqrt{10} - 1)$
- ☐ $I = \sqrt{10} + 1$
- ☐ $I = 2\,(\sqrt{10} - 1)$

Question 17 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \mathrm{Log}\big(2\,\mathrm{Arctg}\,(3+5x^2)\big)\ .$$

Alors :

- ☐ $f'(x) = \dfrac{2x}{(25x^4+30x^2+10)\ \mathrm{Arctg}\big(3+5x^2\big)}$
- ☐ $f'(x) = \dfrac{2x}{(5x^4+6x^2+2)\ \mathrm{Arctg}\big(3+5x^2\big)}$
- ☐ $f'(x) = \dfrac{10x}{\mathrm{Arctg}\big(3+5x^2\big)}\Big(1+\big(3+5x^2\big)^2\Big)$
- ☐ $f'(x) = \mathrm{Log}(2) + \dfrac{x}{(5x^4+6x^2+2)\ \mathrm{Arctg}\big(3+5x^2\big)}$

Question 18 : Soit la série numérique S avec paramètre $c \in \mathbb{R}$ définie par

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{cn}}\ .$$

Alors :

- ☐ S converge si et seulement si $2 > c > 0$
- ☐ S converge si et seulement si $c \geq 1$
- ☐ S converge si et seulement si $c \geq 0$
- ☐ S converge si et seulement si $c > 3$

Question 19 : Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, la suite des sommes partielles. Si $\lim_{n\to+\infty} s_n = 1$, alors :

- ☐ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} (s_{2n} - 2s_n) = 0$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} (s_{2n} - s_n) = 0$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} < 1$

Question 20 : Soit la fonction $f\colon [-1,3] \to [-1,3]$ définie par

$$f(x) = \sqrt{|x-1| + 2x}\ .$$

Alors :

- $\square$ f est surjective
- $\square$ f est discontinue en $x = 1$
- $\square$ f est injective
- $\square$ f est dérivable sur $]-1,3[$

Question 21 : Soit l'intégrale généralisée

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - 1}\, \mathrm{d}x\ .$$

Alors :

- $\square$ $I = 2\ \mathrm{Log}\left(\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1}\right)$
- $\square$ l'intégrale I diverge
- $\square$ $I = \dfrac{1}{2}\ \mathrm{Log}\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}\right)$
- $\square$ $I = -\,\mathrm{Log}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$

Question 22 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Alors :

- $\square$ f est une fois dérivable sur $\mathbb{R}$, mais pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\square$ f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, mais pas trois fois dérivable.
- $\square$ f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\square$ f est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Question 23 : Soit la suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_n = \sqrt{3n - \sin(n)} - \sqrt{3n + \cos(n)}\ .$$

Alors :

- $\square$ $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
- $\square$ la suite (a_n) diverge.
- $\square$ $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$
- $\square$ $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 24 : Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série numérique divergente et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Alors la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble borné de $\mathbb{R}$ et $c = \operatorname{Sup} A$. Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x \in A$ tel que $x + \epsilon \geq c$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : L'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(x^{13}\right) \mathrm{d}x$ vaut zéro.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : La fonction $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité en $x = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 2h)}{h} = 2f'(x_0)\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 29 : Soit $f\colon\ ]-1,1[\ \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet autour de $x = 0$ le développement limité $f(x) = x - 2x^3 + x^3\varepsilon(x)$, où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 0.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 30 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_{-5}^{x} \cos(t)\,\mathrm{d}t$. Alors $f'(x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 31 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}$ tels que $A \cap B \neq \emptyset$ (ensemble vide). Alors $\mathrm{Inf}\, A \leq \mathrm{Inf}\, A \cap B$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 32 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b_n = \cos(a_n)$ converge. Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 33 : Soit $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f\big([1,2]\big) = \,]1,2[$. Alors f n'est pas continue sur $[1,2]$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 34 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telles que $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout $x \in \,]a,b[$. Alors $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \,]a,b]$.

☐ VRAI ☐ FAUX