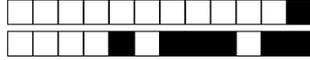


# Analyse I

## Série de révision

### Automne 2018

- Pour les questions à choix multiple, on comptera :
  - +3 points si la réponse est correcte,
  - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix, -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type vrai-faux, on comptera :
  - +1 point si la réponse est correcte,
  - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix, -1 point si la réponse est incorrecte.



## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1 :** Soit l'intégrale

$$I = \int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{1-4x+4x^2}} dx .$$

Alors :

- $I = \frac{1}{2} \text{Log}(5)$
- $I = \frac{1}{2} \text{Log}(6 - \sqrt{33})$
- $I = -\frac{1}{2} \text{Arcsin}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
- $I = -\frac{1}{2} \text{Log}(5)$

**Question 2 :** Soit une fonction  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et la suite de nombre réels  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie récursivement par  $a_0 = 1$  et  $a_n = g(a_{n-1})$  pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Alors, la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge pour  $g$  définie par :

- $g(x) = 2x - 2$
- $g(x) = -x^2 + 2x - 2$
- $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$
- $g(x) = x + 1$

**Question 3 :** Soit la fonction  $f: ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \frac{e^{\cos(x)-1} - 1 - x^2}{(\sin(x))^2} .$$

Alors :

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{3}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$



**Question 4 :** Soit la série numérique  $S$  définie par

$$S = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k .$$

Alors :

- $S = 2$   
  $S = \frac{2}{5}$   
  $S = -\frac{2}{5}$   
  $S = \frac{3}{5}$

**Question 5 :** Soit  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3 \varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  le développement limité d'ordre trois de la fonction  $f: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

autour de  $x = 0$ . Alors :

- $a_3 = 5$   
  $a_3 = -\frac{1}{6}$   
  $a_3 = \frac{5}{6}$   
  $a_3 = 1$

**Question 6 :** Soit l'intégrale

$$I = \int_{-1}^0 x^2 e^{-x} dx .$$

Alors :

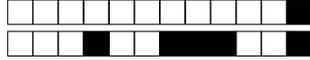
- $I = -3e + 2$   
  $I = e - 2$   
  $I = 4e - 1$   
  $I = 5e - 2$

**Question 7 :** Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(e^{\frac{1}{x}})}{e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors :

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$   
  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$   
  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$   
  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$



**Question 8 :** Soit le nombre complexe

$$z = \frac{e^{i\pi/2} + e^{i\pi/4}}{e^{i\pi/3} + e^{i\pi/6}}.$$

Alors :

- $z = \frac{2}{\sqrt{3}+1}(\sqrt{2}+1+i)$
- $z = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\sqrt{3}}(3+\sqrt{2}-i\sqrt{2})$
- $z = \frac{\sqrt{2}+1+i}{\sqrt{3}+1}$
- $z = \frac{\sqrt{2}+1-i}{\sqrt{3}+1}$

**Question 9 :** Soit la fonction  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sin(x)e^{-x}$ . Alors :

- $f$  atteint son minimum en  $x = \frac{3\pi}{2}$  et son maximum en  $x = \frac{\pi}{2}$ .
- $f$  atteint son minimum en  $x = 0$  en  $x = \pi$  et en  $x = 2\pi$ .
- $f$  atteint son minimum en  $x = \frac{5\pi}{4}$  et son maximum en  $x = \frac{\pi}{4}$ .
- $f$  atteint son minimum en  $x = 0$  et son maximum en  $x = \frac{\pi}{4}$ .

**Question 10 :** Soit  $r$  le rayon de convergence de la série entière  $S$ , définie par

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{5^{k+3}} x^k.$$

Alors :

- $r = 0$
- $r = 5$
- $r = 25$
- $r = \frac{1}{5}$

**Question 11 :** Soit la fonction bijective  $f: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = 2 + \text{Log} \left( \frac{2e+x}{x^2} \right),$$

et soit  $f^{-1}$  la fonction réciproque de  $f$  et  $y_0 := f(2e)$ . Alors :

- $(f^{-1})'(y_0) = -\frac{4e}{3}$
- $(f^{-1})'(y_0) = 2e+1$
- $(f^{-1})'(y_0) = -\frac{1}{2e+1}$
- $(f^{-1})'(y_0) = \frac{3}{4e}$



**Question 12 :** Soit le nombre complexe  $z = e^i + e^{i/3}$ . Alors :

- $|z| = \sqrt{2}$   
  $|z| = \sqrt{2 + 2 \cos(\frac{2}{3})}$   
  $|z| = \sqrt{1 + (e^{2i/3} + e^{-2i/3})}$   
  $|z| = \sqrt{2 + 2(e^{i/3} + e^{-i/3})}$

**Question 13 :** Soit la suite de nombres réels  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$a_n = \frac{\text{Log}(n + e^n)}{n + 1} .$$

Alors :

- $a_n$  est une suite bornée et  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$   
  $a_n$  est une suite bornée et  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$   
  $a_n$  est une suite bornée et  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$   
  $a_n$  est une suite non bornée

**Question 14 :** Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  tels que la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)(x+2) & \text{si } x < 0, \\ \alpha x + \beta & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Alors :

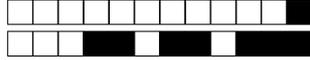
- $f(2) = 12$   
  $f(3) = 9$   
  $f(-3) + f(1) = 7$   
  $f'(2) = 2$

**Question 15 :** Soit le sous-ensemble  $E \subset \mathbb{R}$ ,

$$E = \left\{ \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} .$$

Alors :

- $\text{Inf } E = -1$   
  $\text{Inf } E = -1 - \sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$   
  $\text{Inf } E = 0$   
  $\text{Inf } E = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



**Question 16 :** Soit l'intégrale

$$I = \int_1^{e^3} \frac{\text{Log}(x)}{x \sqrt{(\text{Log}(x))^2 + 1}} dx .$$

Alors :

- $I = \sqrt{10} - 1$   
  $I = \frac{1}{2}(\sqrt{10} - 1)$   
  $I = \sqrt{10} + 1$   
  $I = 2(\sqrt{10} - 1)$

**Question 17 :** Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \text{Log}(2 \text{Arctg}(3 + 5x^2)) .$$

Alors :

- $f'(x) = \frac{2x}{(25x^4 + 30x^2 + 10) \text{Arctg}(3 + 5x^2)}$   
  $f'(x) = \frac{2x}{(5x^4 + 6x^2 + 2) \text{Arctg}(3 + 5x^2)}$   
  $f'(x) = \frac{10x}{\text{Arctg}(3 + 5x^2)} (1 + (3 + 5x^2)^2)$   
  $f'(x) = \text{Log}(2) + \frac{x}{(5x^4 + 6x^2 + 2) \text{Arctg}(3 + 5x^2)}$

**Question 18 :** Soit la série numérique  $S$  avec paramètre  $c \in \mathbb{R}$  définie par

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{cn}} .$$

Alors :

- $S$  converge si et seulement si  $2 > c > 0$  .  
  $S$  converge si et seulement si  $c \geq 1$   
  $S$  converge si et seulement si  $c \geq 0$   
  $S$  converge si et seulement si  $c > 3$

**Question 19 :** Soit  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels et  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , la suite des sommes partielles. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1$ , alors :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$   
  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_{2n} - 2s_n) = 0$   
  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_{2n} - s_n) = 0$   
  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} < 1$



**Question 20 :** Soit la fonction  $f: [-1, 3] \rightarrow [-1, 3]$  définie par

$$f(x) = \sqrt{|x-1| + 2x} .$$

Alors :

- $f$  est surjective
- $f$  est discontinue en  $x = 1$
- $f$  est injective
- $f$  est dérivable sur  $] -1, 3 [$

**Question 21 :** Soit l'intégrale généralisée

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx .$$

Alors :

- $I = 2 \operatorname{Log} \left( \frac{e-1}{e+1} \right)$
- l'intégrale  $I$  diverge
- $I = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left( \frac{e+1}{e-1} \right)$
- $I = -\operatorname{Log} (e^2 - 1)$

**Question 22 :** Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors :

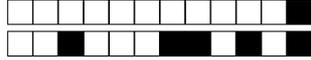
- $f$  est une fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , mais pas deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , mais pas trois fois dérivable.
- $f$  n'est pas dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- $f$  est trois fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

**Question 23 :** Soit la suite de nombres réels  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$a_n = \sqrt{3n - \sin(n)} - \sqrt{3n + \cos(n)} .$$

Alors :

- $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
- la suite  $(a_n)$  diverge.
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$



## Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

**Question 24 :** Soit  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  une série numérique divergente et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ . Alors la série numérique  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$  converge.

VRAI     FAUX

**Question 25 :** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un ensemble borné de  $\mathbb{R}$  et  $c = \text{Sup } A$ . Alors pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $x \in A$  tel que  $x + \epsilon \geq c$ .

VRAI     FAUX

**Question 26 :** L'intégrale  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^{13}) dx$  vaut zéro.

VRAI     FAUX

**Question 27 :** La fonction  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sin\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$  est prolongeable par continuité en  $x = 0$ .

VRAI     FAUX

**Question 28 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable en  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 2h)}{h} = 2f'(x_0).$$

VRAI     FAUX

**Question 29 :** Soit  $f: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction qui admet autour de  $x = 0$  le développement limité  $f(x) = x - 2x^3 + x^3\varepsilon(x)$ , où  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ . Alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 0.$$

VRAI     FAUX



**Question 30 :** Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \int_{-5}^x \cos(t) dt$ . Alors  $f'(x) = -\sin(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

VRAI     FAUX

**Question 31 :** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  et  $B \subset \mathbb{R}$  deux sous-ensembles bornés de  $\mathbb{R}$  tels que  $A \cap B \neq \emptyset$  (ensemble vide). Alors  $\inf A \leq \inf A \cap B$ .

VRAI     FAUX

**Question 32 :** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels telle que la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $b_n = \cos(a_n)$  converge. Alors la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

VRAI     FAUX

**Question 33 :** Soit  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $f([1, 2]) = ]1, 2[$ . Alors  $f$  n'est pas continue sur  $[1, 2]$ .

VRAI     FAUX

**Question 34 :** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  et  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$  et dérivables sur  $]a, b[$  telles que  $f'(x) \leq g'(x)$  pour tout  $x \in ]a, b[$ . Alors  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in ]a, b[$ .

VRAI     FAUX