EPFL Automne 2022
Algèbre Linéaire Avancée, MATH-110

Correction Série 13

1 Calculs de determinants

Exercice 1

1) A l'aide d'opérations élémentaires, nous transformons notre matrice en une matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ -1 & 1 & a & b \\ a & 1 & a & c \\ 1 & 1 & -a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Cl_{2,1,-1},Cl_{3,1,a},Cl_{4,1,1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b+1 \\ 0 & 1 & a^2 & c-a \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Cl_{3,2,1},Cl_{4,2,1}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b+1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & c-a-b-1 \\ 0 & 0 & -2 & -b-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Cl_{4,3,-\frac{2}{a^2-1}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b+1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & c-a-b-1 \\ 0 & 0 & 0 & -b-2+2*\frac{c-a-b-1}{a^2-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ -1 & 1 & a & b \\ a & 1 & a & c \\ 1 & 1 & -a & 0 \end{pmatrix}) = (a^2-1)*(-b-2+2*\frac{c-a-b-1}{a^2-1}) = a^2*(-(b+2))-2a-b+2c$$

2) De la même manière, à l'aide d'opérations élémentaires, nous transformons notre matrice en une matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Cl_{2,1,1},Cl_{3,1,1},Cl_{4,1,\lambda}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Cl_{4,3,-1}}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2-\lambda-\lambda^2\end{pmatrix} \xrightarrow{Cl_{4,2,-1}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda\\ 0 & 0 & 0 & 3-2\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}$$

On remarque que $3-2\lambda-\lambda^2 = -(\lambda+3)(\lambda-1)$

$$\det(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\\ 0 & 0 & 0 & 3-2\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}) = -(\lambda-1)^2*(\lambda+3)(\lambda-1) = -(\lambda-1)^3*(\lambda+3)$$

On a donc

$$\det(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda\\ 0 & 0 & 0 & 3-2\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & 1\\ 1 & \lambda & 1 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}) = (\lambda-1)^3*(\lambda+3)$$

On rappelle que l'opération "échanger deux lignes" multiplie le determinant par (-1) et que le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieur) est égal au produit des composantes de sa diagonale.

Exercice 2

On suppose $K = \mathbb{C}$. On considere les matrices ($a \in \mathbb{C}$)

$$C = \begin{pmatrix}0 & 5+2i & -3i & 2+7i & a\\ 0 & 1 & -i & 1 & 0\\ i & 7+i & 6i & 3i & -4+i\\ 0 & i & 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a & 2 & 0\end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -11 & 13 & 0 & -3\\ 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 8 & 5 & 0 & 4\\ 2 & 7 & 4 & 77 & 0 & 2\\ 5 & 1 & 6 & 12 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

1. Note that the inverse of a complex number $a+ib$ is

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}$$

The computations are then similar to exercise 1 and one obtains $\det(C) = ia^3 + a^2 + 2ia = ia(a+i)(a-2i)$. Therefore the determinant is unequal 0 exactly when $a \neq 0, -i, 2i$, so C is invertible when $a \neq 0, -i, 2i$.

2. We choose the first column for the first development, the last column for the second development and the lowest row for the last development.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 5+2i & -3i & 2+7i & a \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & i & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix} = +i \det \begin{pmatrix} 5+2i & -3i & 2+7i & a \\ 1 & -i & 1 & 0 \\ i & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= i \cdot (-a) \det \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 0 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -ia \cdot (-a) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & a \end{pmatrix} - ia \cdot 2 \det \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= ia^2(1 \cdot a - i \cdot 1) - 2ia(1 \cdot 0 + i^2) = ia^3 + a^2 + 2ia$$

3. We calculate the inverse for $a = 1$. For that we write a 5×5 identity matrix next to C. Then we and apply the same steps as to C to the identity. We use row reduction until we arrive at the identity on the left hand side.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 5+2i & -3i & 2+7i & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 7+i & 6i & 3i & -4+i & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} i & 7+i & 6i & 3i & -4+i & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5+2i & -3i & 2+7i & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1-7i & 6 & 3 & 1+4i & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1+2i & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-i & 0 & 0 & -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2i-2 & -3-5i & 1 & 1 & -5-2i & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\vdots$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1-4i & \frac{-19+227i}{10} & -i & \frac{63+21i}{10} & \frac{-167-49i}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3+i}{10} & 0 & \frac{-1-7i}{10} & \frac{-1+3i}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1+3i}{5} & 0 & \frac{-3-i}{5} & \frac{2-i}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1-3i}{10} & 0 & \frac{3+i}{10} & \frac{3+i}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-27-9i}{5} & 0 & \frac{-1-2i}{5} & \frac{9-12i}{5} \end{array}\right)$$

If you want to see the general inverse check inv$\{\{0, 5+2i, -3i, 2+7i, a\}, \{0, 1, -i, 1, 0\}, \{i, 7+i, 6i, 3i, -4+i\}, \{0, i, 0, a, 0\}, \{0, 0, a, 2, 0\}\}$ on https ://www.wolframalpha.com

4. By Lagrange, the computation of the determinant of the matrix D can break down to compute some determinants of 2×2 matrices. Since all elements are integers, the determinants of these 2×2 matrices are integers as well and thus the determinant is an integer.

5. To compute the determinant with Lagrange first develop along the first row, then the second last column then the new second (in the beginning third) row. One obtains $\det(D) = -1050$ and thus $\det(D^3) = (\det(D))^3 = (-1050)^3$

6. Note that if $a = b(\text{mod}p)$, then $a = b + kp$, where k is an integer.
Assume D is a 2×2 matrix given by

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Then

$$D_p = \begin{pmatrix} a_{11} + k_{11}p & a_{12} + k_{12}p \\ a_{21} + k_{21}p & a_{22} + k_{22}p \end{pmatrix}$$

where $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ are integers.
Therefore, $\det D_p = (a_{11} + k_{11}p) \times (a_{22} + k_{22}p) - (a_{12} + k_{12}p) \times (a_{21} + k_{21}p) = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21} + kp = \det D + kp = \det D(\bmod p)$ with some k is an integer. Expand it to dimension n, you can conclude that $\det D_p = \det D(\text{mod}p)$ in a general sense.

7. With the help of the conclusion in 6, we know that p has to be a divisor of 1050 so that $\det D \equiv 0 \pmod{p}$. The prime divisors are $p = 2, 3, 5, 7$ so in these cases it is not invertible.

Exercice 3

Suppose for a contradiction that there exists a matrix $M \in M_3(\mathbb{R})$ satisfying

$$M^{2022} + 2022\mathrm{Id}_3 = \mathbf{0}_{3\times 3}.$$

In other words :

$$M^{2022} = -2022\mathrm{Id}_3.$$

Taking determinants on both sides, we get :

$$(\det(M))^{2022} = -(2022)^3.$$

Since $(\det M) \in \mathbb{R}$ we get a contradiction, since the left hand side is necessarily positive (and the right hand side is negative).

Exercice 4

1. On applique la formule donnée dans l'énoncé pour trouver la matrice des cofacteurs. Par exemple, on a :

$$\mathrm{cof}(E)_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ a+5 & 3 \end{pmatrix} = 5 * 3 - (a+5) * (-3) = 30 + 3a$$

On obtient alors :

$$\mathrm{cof}(E) = \begin{pmatrix} 30+3a & 6 & -2a-10 \\ -6a & 12 & -4a-20 \\ -6a & 12 & 20+4a \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{cof}(F) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -24 \\ -2 & 3 & 8 \\ 2 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

2. Calculons le déterminant de E en développant par rapport à la première ligne

$$\det(E) = \det\begin{pmatrix} 4 & 2a & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & a+5 & 3 \end{pmatrix} = 4 * \det\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ a+5 & 3 \end{pmatrix} - 2a * \det\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 4 * (30 + 3a) - 2a * (-6) = 120 + 24a$$

On a alors

$$E * \mathrm{cof}(E)^t = \begin{pmatrix} 4 & 2a & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & a+5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30+3a & -6a & -6a \\ 6 & 12 & 12 \\ -2-10a & -4a-20 & 20+4a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 120+24a & 0 & 0 \\ 0 & 120+24a & 0 \\ 0 & 0 & 120+24a \end{pmatrix} = (120 + 24a)I_3$$

On calcule de manière similaire le déterminant de F. On trouve $\det(F) = 22$, et

$$F * \mathrm{cof}(F)^t = \begin{pmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix} = 22I_3$$

Ainsi les relations de Cramer sont bien vérifiées dans le cas de E et de F.

3. Si $120 + 24a \neq 0$ dans K, alors en utilisant la partie 2., on a

$$\begin{aligned} E * ((120 + 24a)^{-1}\mathrm{cof}(E)^t) &= (120 + 24a)^{-1} * E * \mathrm{cof}(E)^t \\ &= (120 + 24a)^{-1} * (120 + 24a)I_3 = I_3 \end{aligned}$$

On a donc

$$E^{-1} = \det(E)^{-1} * \mathrm{cof}(E)^t = (120 + 24a)^{-1} * \mathrm{cof}(E)^t$$

Par un raisonnement similaire, si $22 \neq 0$ dans K, alors

$$F^{-1} = \det(F)^{-1} * \mathrm{cof}(F)^t = 22^{-1} * \mathrm{cof}(F)^t$$

4. Calculons tout d'abord le polynôme caractéristique de F :

$$p_F(t) = \det(tI_3 - F) = \det \begin{pmatrix} t-3 & -2 & 0 \\ -2 & t-6 & -1 \\ -4 & 0 & t-1 \end{pmatrix} = t^3 - 10t^2 + 23t - 22$$

On évalue ensuite ce polynôme avec la matrice F

$$\begin{aligned} & F^3 - 10F^2 + 23F - 22I_3 \\ &= \begin{pmatrix} 83 & 134 & 20 \\ 174 & 284 & 47 \\ 68 & 80 & 9 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 13 & 18 & 2 \\ 22 & 40 & 7 \\ 16 & 8 & 1 \end{pmatrix} + 23 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 22 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et le théorème de Cayley-Hamilton est bien vérifier dans ce cas.

Exercice 5

Soit $M = (m_{ij})_{ij \leqslant d} \in M_d(\mathbb{C})$ une matrice a coefficients complexes. On pose $\overline{M}(\overline{m}_{ij})_{ij \leqslant d}$ la matrice obtenue an prenant le conjugue complexe de tous les coordonnees de M.

1. Recall that

$$\det(\overline{M}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \operatorname{sign}(\sigma) \overline{m_{1\sigma(1)}} \overline{m_{2\sigma(2)}} \cdots \overline{m_{d\sigma(d)}}$$

Using the fact : $\operatorname{sign}(\sigma) \in \mathbb{R}$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ and $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$, we get

$$\det(\overline{M}) = \overline{\sum_{sigma \in \mathfrak{S}_d} \operatorname{sign}(\sigma) m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \cdots m_{d\sigma(d)}} = \overline{\det(M)}$$

2. We have

$$\det(M.\overline{M}) = \det M . \det(\overline{M}) = |\det M|^2 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

For the last equality we have used part 1.

3. Let

$$M = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

We have

$$M\overline{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1-\mathrm{i} \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \notin M_2(\mathbb{R})$$

Let us make a brief interlude about complex conjugation of polynomials. Let $p(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$, we define the conjugate of p by

$$\overline{p(X)} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} X^i$$

We have the following properties, $p(X), q(X) \in \mathbb{C}[X]$

- $\overline{p(X) + q(X)} = \overline{p(X)} + \overline{q(X)}$
- $\overline{p(X).q(X)} = \overline{p(X)}.\overline{q(X)}$
- $p(X) \in \mathbb{R}[X] \iff \overline{p(X)} = p(X)$
- $\overline{\overline{p(X)}} = p(X)$

With these properties we return to the question

4.

$$\overline{P_{car,M}}(X) = \overline{det(N)} = \overline{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \operatorname{sign}(\sigma) n_{1\sigma(1)} n_{2\sigma(2)} \cdots n_{d\sigma(d)}}$$

where $N = X\mathrm{Id} - M$, $n_{ij} \in \mathbb{C}[X]$. Using the first two properties we get

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \operatorname{sign}(\sigma) \overline{n_{1\sigma(1)} n_{2\sigma(2)}} \cdots \overline{n_{d\sigma(d)}} = det(\overline{N}) = det(X\mathrm{Id} - \overline{M}) = P_{car,\overline{M}}(X)$$

$\overline{N} = (\overline{n_{ij}}) = X\mathrm{Id} - \overline{M}$

5. We have by the previous part,

$$P_{car,M}(X).P_{car,\overline{M}}(X) = P_{car,M}(X).\overline{P_{car,M}(X)}.$$

To check this product is in $\mathbb{R}[X]$, it suffices to check

$$\overline{P_{car,M}(X).\overline{P_{car,M}(X)}} = P_{car,M}(X).\overline{P_{car,M}(X)}$$

We have using the properties listed above :

$$\overline{P_{car,M}(X).\overline{P_{car,M}(X)}} = \overline{P_{car,M}(X)}.\overline{\overline{P_{car,M}(X)}} = \overline{P_{car,M}(X)}.P_{car,M}(X)$$

as was to be shown.

2 Certain groupes de matrices

Exercice 6

Soit $O_d(K)$ l'ensemble des matrices orthogonales, i.e., les matrices $M \in M_d(K)$ telles que $M^t \cdot M = I_d$.

1. On va montrer que $\det(M) = \pm 1$. En effet, $1 = \det(I_d) = \det(M^t \cdot M) = \det(M^t) \cdot \det(M) = \det(M)^2$. Donc $\det(M) = \pm 1$.
2. $O_d(K) \subset GL_d(K)$ est un sous-groupe multiplicatif car
   — $I_d \in O_d(K)$
   — Stabilité de la multiplitcation : si $M, N \in O_d(K)$, alors $\det(MN) = \det(M)\det(N) = \pm 1$, donc $MN \in O_d(K)$.
   — Inverses : soit $M \in O_d(K)$, alors $M^{-1} = M^t \in O_d(K)$.
3. $SO_d(K) \subset O_d(K)$ est un sous-groupe distingué :
   — $I_d \in SO_d(K)$ car $\det(I_d) = 1$
   — Stabilité de la multiplitcation : si $M, N \in SO_d(K)$, alors $\det(MN) = \det(M)\det(N) = 1$, donc $MN \in SO_d(K)$.
   — Inverses : soit $M \in SO_d(K)$, alors $\det(M^{-1}) = \det(M^t) = \det(M) = 1$ donc $M^{-1} \in O_d(K)$
   — $SO_d(K)$ est distingué, en effet prenons $N \in O_d(K)$ alors $\det(NMN^{-1}) = \det(N)\det(M)\det(N^{-1})$. Comme $N \in O_d(K)$ on a $\det(N) = \det(N^{-1}) = \pm 1$, alors $\det(NMN^{-1}) = (\pm 1)^2 = 1$ et $NMN^{-1} \in SO_d(K)$ donc $SO_d(K)$ est un sous groupe distingué.
4. Si $\mathrm{char}(K) \neq 2$. La matrice suivante a déterminant -1 :

$$M^- = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

5. On montre que $O_d(K) = SO_d(K) \sqcup M^- SO_d(K)$ par double inclusion.
   — $O_d(K) \supseteq SO_d(K) \sqcup M^- SO_d(K)$: Si $A \in SO_d(K) \sqcup M^- SO_d(K)$, soit $A\mathrm{SO}_d(K)$, soit $A \in M^- SO_d(K)$. Dans le premier cas $\det(A) = 1$ donc $A \in O_d(K)$. Dans le deuxième cas on a $A = M^- B$ avec $B \in SO_d(K)$ et donc $\det(A) = \det(M^- B) = -1$, ie, $A \in O_d(K)$.
   — $O_d(K) \subseteq SO_d(K) \sqcup M^- SO_d(K)$: Si $A \in O_d(K)$, alors $\det(A) = \pm 1$. Dans le cas ou $\det(A) = 1$ on a immédiatement $A \in SO_d(K)$. Il faut donc

traiter le cas ou $\det(A) = -1$. Dans ce cas on doit trouver une matrice $B \in SO_d(K)$ telle que $A = M^-B$. Puisque la matrice M^- est inversible, la matrice B que l'on cherche est $B = (M^-)^{-1}A$. Avec cela on a bien que $A = M^-B \in M^-SO_d(K)$ ce qui prouve la deuxième inclusion.

Exercice 7

1. $\forall i, j \in \{1, ..., d_1\}$, notons que $M'_{kj} = 0 \ \forall k > d_1$. On a alors :
   $(M.M')_{ij} = \sum_{k=1}^{d} M_{ik}M'_{kj} = \sum_{k=1}^{d_1} M_{ik}M'_{kj} = \sum_{k=1}^{d_1}(M_1)_{ik}(M'_1)_{kj} = (M_1.M'_1)_{ij}$

   Similairement, $\forall i, j \in \{d_1 + 1, ..., d\}$, notons que $M_{ik} = 0 \ \forall k \leqslant d_1$, que $(M_2)_{ij} = M_{(i+d_1)(j+d_1)}$ et que $(M'_2)_{ij} = M'_{(i+d_1)(j+d_1)}$. On a alors :
   $(M.M')_{ij} = \sum_{k=1}^{d} M_{ik}M'_{kj} = \sum_{k=d_1+1}^{d} M_{ik}M'_{kj} = \sum_{k=1}^{d_2} M_{i(k+d_1)}M'_{(k+d_1)j}$
   $= \sum_{k=1}^{d_2}(M_2)_{(i-d_1)k}(M'_2)_{k(j-d_1)} = (M_2.M'_2)_{(i-d_1)(j-d_1)}$

   Finalement, $\forall i \in \{d_1 + 1, ..., d\}$, $\forall j \in \{1, ..., d_1\}$, notons que $M_{ik} = 0$ $\forall k \leqslant d_1$ et que $M'_{kj} = 0 \ \forall k > d_1$. On a alors :
   $(M.M')_{ij} = \sum_{k=1}^{d} M_{ik}M'_{kj} = 0$

   On en conclut que $M.M'$ est de la forme
   $$M.M' = \begin{pmatrix} M_1.M'_1 & \star \\ \mathbf{0} & M_2.M'_2 \end{pmatrix}$$

2. Par le théoreme 11.11, $det(M) = det(M_1)det(M_2)$ donc M est inversible ssi $det(M) \neq 0$ ssi $det(M_1) \neq 0$ et $det(M_2) \neq 0$ ssi M_1 et M_2 sont inversibles.

   Supposons a present que M_1 et M_2 sont inversibles.
   Posons $M' = \begin{pmatrix} (M_1)^{-1} & \star' \\ \mathbf{0} & (M_2)^{-1} \end{pmatrix}$. Alors :
   $M.M' = Id_d \Leftrightarrow Id_d = \begin{pmatrix} M_1.(M_1)^{-1} & M_1.\star' + \star.(M_2)^{-1} \\ \mathbf{0} & M_2(M_2)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_{d_1} & M_1.\star' + \star.(M_2)^{-1} \\ \mathbf{0} & Id_{d_2} \end{pmatrix}$
   $\Leftrightarrow M_1.\star' + \star.(M_2)^{-1} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \star' = -(M_1)^{-1}.\star.(M_2)^{-1}$
   Donc M est inversible d'inverse $M^{-1} = \begin{pmatrix} (M_1)^{-1} & -(M_1)^{-1}.\star.(M_2)^{-1} \\ \mathbf{0} & (M_2)^{-1} \end{pmatrix}$

3. $P_{d_1,d_2}(K)$ est stable par multiplication après le premier part et stable par inversion après le deuxieme. Alors c'est un sous-groupe.

4. Montrons d'abord par induction que $M^k = \begin{pmatrix} (M_1)^k & \star \\ \mathbf{0} & (M_2)^k \end{pmatrix}$ $\forall k \geqslant 1$:

   C'est par definition vrai pour $k = 1$. Supposons que c'est vrai au rang $k-1$, on a alors :
   $M^k = M.M^{k-1} = \begin{pmatrix} M_1 & \star \\ \mathbf{0} & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (M_1)^{k-1} & \star \\ \mathbf{0} & (M_2)^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M_1)^k & \star \\ \mathbf{0} & (M_2)^k \end{pmatrix}$
   On conclut que la propriete est vraie $\forall k \geqslant 1$.
   Calculons maintenent $P(M)$:
   $P(M) = \sum_{k=-m}^{n} a_k M^k = \sum_{k=-m}^{n} a_k \begin{pmatrix} (M_1)^k & \star \\ \mathbf{0} & (M_2)^k \end{pmatrix} = \sum_{k=-m}^{n} \begin{pmatrix} a_k(M_1)^k & \star \\ \mathbf{0} & a_k(M_2)^k \end{pmatrix}$
   $\Leftrightarrow P(M) = \begin{pmatrix} P(M_1) & \star \\ \mathbf{0} & P(M_2) \end{pmatrix}$

3 Autour de Cayley-Hamilton

Exercise 8

On notera $\mathrm{ev}_{M,d}$ la restriction de ev_M sur $K[X]_{\leqslant d}$.

1. On a $\dim(K[X]_{\leqslant d}) = d+1$, parceque $\{1, X, \cdots, X^d\}$ est une base de $K[X]_{\leqslant d}$. On utilise le theorem de noyau-image :

$$\begin{aligned} d+1 &= \dim(K[X]_{\leqslant d}) \\ &= \dim(\ker(\mathrm{ev}_{M,d})) + \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{ev}_{M,d})) \\ &\leqslant \dim(\ker(\mathrm{ev}_{M.d})) + d_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

   Si $d \geqslant d_{\mathcal{A}}$ on a donc

$$d_{\mathcal{A}} + 1 \leqslant \dim(\ker(\mathrm{ev}_{M,d})) + d_{\mathcal{A}},$$

   et donc

$$\dim(\ker(\mathrm{ev}_{M,d})) \geqslant 1.$$

   Dans ce cas l'application lineaire ev_M n'est pas injective. Donce il existe un $P \in K[X]_{\leqslant d_{\mathcal{A}}} \setminus \{0\} \subset K[X] \setminus \{0\}$ t.q.

$$P(M) = \mathrm{ev}_M(P) = 0_{\mathcal{A}}.$$

2. On a deja vu que

$$\ker(\mathrm{ev}_M) = \{P \in K[X],\ P(M) = 0_{\mathcal{A}}\} \neq \{0\}.$$

On pose
$$d' := \min\{\deg(f),\ f \in \ker(\mathrm{ev}_M) \smallsetminus \{0\}\}$$
et on choisit $Q \in \ker(\mathrm{ev}_M)) \smallsetminus \{0\}$ t.q. $\deg(Q) = d'$. On peut aussi supposer que Q est unitaire, en fait si $Q = a_0 + a_1.X + \cdots + a_{d'}X^{d'}$, $a_{d'} \neq 0$, on a que
$$\mathrm{ev}_M\left(a_{d'}^{-1}Q\right) \overset{\text{linearite}}{=} a_{d'}^{-1}\mathrm{ev}_M(Q) = 0_{\mathcal{A}},$$
et le polynome $a_{d'}^{-1}Q$ est unitaire de grad d'. Suppose $f \in \ker(\mathrm{ev}_M)$. Avec la Theoreme 5.4 (notes sur polynoms sur le moodle) ils existent $P \in K[X]$ et $R \in K[X]$ avec $R = 0$ ou $\deg(R) < \deg(Q)$ t.q.
$$f = PQ + R,$$
On a que
$$0_{\mathcal{A}} = \mathrm{ev}_M(F) = \mathrm{ev}_M(PQ + R) = \mathrm{ev}_M(P)\mathrm{ev}_M(Q) + \mathrm{ev}_M(R) = \mathrm{ev}_M(R).$$
Donc $R \in \ker(\mathrm{ev}_M)$. Pour la miniminalite de $d' = \deg(Q)$ on a que $R = 0$. Il manque de montrer l'unicite de Q. On suppose qu'il y a un autre $Q' \in K[X]$ unitaire avec le meme propriete. On a alors que $Q'|Q$ et que $Q|Q'$. On utilise la proposition 5.7 (notes sur polynomes) pour deduir que
$$\deg(Q) = \deg(Q').$$
Donc $Q = a.Q'$ pour un $a \in K \smallsetminus \{0\}$ et parceque le duex sont unitaire on que $a = 1$ et $Q = Q'$. On pose $Q_M = Q$.

3. On a $\dim(M_d(K)) = d^2 \geqslant d$. Avec la solution de part (1) on a que il y a $P \in K[X]_{\leqslant d^2} \smallsetminus \{0\}$ t.q. $\mathrm{ev}_M(P) = 0$. Pour la parte (2) on a que $Q_M|P$ et donc
$$\deg(Q_M) \leqslant \deg(P) \leqslant d^2.$$

4. Soit $\lambda \in K \smallsetminus \{0\}$. On pose
$$D_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_d(K).$$
On a $D_\lambda = \lambda.I_d$. Alors on a que $Q_{D_\lambda}|(X - \lambda) \in K[X]$. Parceque $X - \lambda$ est unitaire et D_λ n'est pas zero on a vraiment que $Q_{D_\lambda} = X - \lambda$.
Soient $d \geqslant 2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in K \smallsetminus \{0\}$.
$$D_{\lambda_1,\lambda_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice D_{λ_1,λ_2} est diagonal avec le premier diagonal coefficient λ_1 plutot les autres λ_2. On a que

$$D^2_{\lambda_1,\lambda_2} - (\lambda_1 + \lambda_2)D_{\lambda_1,\lambda_2} + \lambda_1\lambda_2 I_d = 0_{d\times d}.$$

D'autre cote on a que $D_{\lambda_1,\lambda_2} - xI_d \neq 0_{d\times d}$ pour tous les $x \in K$, parceque $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Par contre on a

$$Q_{D_{\lambda_1,\lambda_2}} = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X - \lambda_1\lambda_2 \in K[X].$$

4 Le retour de la matrice compagnon

Exercise 9

1. Ce premier exercice suit d'une lecture matricielle. En effet comme la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ est M, on obtient de la première colonne que

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = 0.\mathbf{e}_1 + 1.\mathbf{e}_2 + 0.\mathbf{e}_3 + ... + 0.\mathbf{e}_d = \mathbf{e}_2$$

On lit similairement de la k-ème colonne pour $k < d$ que $\varphi(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_{k+1}$ comme voulu pour le premier résultat. À partir de ceci, le deuxième résultat suit simplement par récurrence : pour $k = 1$ on a bien sur que $\varphi^1(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{1+1}$. Si le résultat tient pour $k' < k$, on a $\varphi^k(\mathbf{e}_1) = \varphi(\varphi^{k-1}(\mathbf{e}_1)) = \varphi(\mathbf{e}_{k+1}) = \mathbf{e}_{k+2}$ comme voulu, et ceci n'est que valide pour $k < d$ car le résultat précédent n'était que valide pour ces valeurs. Finalement, on lit de la dernière colonne de M que

$$\varphi(\mathbf{e}_d) = -b_0\mathbf{e}_1 - b_1\mathbf{e}_2 - ... - b_{d-1}\mathbf{e}_d$$

donc

$$\varphi(\mathbf{e}_d) + b_{d-1}\mathbf{e}_d + b_{d-2}\mathbf{e}_{d-1} + ... + b_0\mathbf{e}_1 = 0$$

comme voulu $\square$

2. Par la question précédente on a

$$\varphi^d(\mathbf{e}_1) = \varphi(\varphi^{d-1}\mathbf{e}_1) = \varphi(\mathbf{e}_d) = -b_0\mathbf{e}_1 - b_1\mathbf{e}_2 - ... - b_{d-1}\mathbf{e}_d$$

donc comme pour $1 \leqslant k \leqslant d$, $\mathbf{e}_k = \varphi^{k-1}(\mathbf{e}_1)$, où on pose $\varphi^0 = \mathrm{Id}$, on obtient

$$\varphi^d(\mathbf{e}_1) = -b_0\mathbf{e}_1 - b_1\varphi(\mathbf{e}_1) - ... - b_{d-1}\varphi^{d-1}(\mathbf{e}_1)$$

ce qui donne le premier résultat voulu.

On peut ensuite écrire

$$\begin{aligned}
&\varphi^d(\mathbf{e}_k) + b_{d-1}\varphi^{d-1}(\mathbf{e}_k) + ... + b_1\varphi(\mathbf{e}_k) + b_0\mathbf{e}_k = \\
&\varphi^d(\varphi^{k-1}(\mathbf{e}_1)) + b_{d-1}\varphi^{d-1}(\varphi^{k-1}(\mathbf{e}_1)) + ... + b_1\varphi(\varphi^{k-1}(\mathbf{e}_1)) + b_0\varphi^{k-1}(\mathbf{e}_1) = \\
&\varphi^{k-1}(\varphi^d(\mathbf{e}_1) + b_{d-1}\varphi^{d-1}(\mathbf{e}_1) + ... + b_1\varphi(\mathbf{e}_1) + b_0\mathbf{e}_1) = \\
&\varphi^{k-1}(0) = 0
\end{aligned}$$

pour tout $k \geqslant 2$. Pour justifier le passage de la deuxième à la troisème ligne on note que $K[\varphi]$ comme défini dans l'énoncé est un sous-anneau commutatif de $\mathrm{End}_K(K^d)$ car c'est l'image par un morphisme d'anneaux d'un anneau commutatif, donc en particulier pour tout polynome $Q, R \in K[X]$ on a $Q(\varphi) \circ R(\varphi) = R(\varphi) \circ Q(\varphi)$, ce qui justifie notre passage en prenant

$$Q = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + ... + b_0, \quad R = X^{k-1}$$

□

3. Tout le travail a déjà été fait dans l'exercice précédent : il suffit de conclure par linéarité. En effet si on pose

$$\psi := \varphi^d + b_{d-1}\varphi^{d-1} + ... + b_0\mathrm{Id}_{K^d}$$

on a montré que $\psi(\mathbf{e}_k) = 0 \ \forall 1 \leqslant k \leqslant d$ et donc comme ψ est une application linéaire qui s'annule sur une base (dans ce cas $\mathscr{B}$), ψ doit être identiquement nulle, c.a.d

$$\varphi^d + b_{d-1}\varphi^{d-1} + ... + b_0\mathrm{Id}_{K^d} = 0$$

comme voulu. Ainsi comme M est la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ on en déduit l'équation **??** □

Exercice 10

1. Applying the following series of type (III) row reduction to $X.\mathrm{Id}_d - M_P$, we have

$$Cl_{d,d-1,1/X} \dots Cl_{32,1/X}Cl_{21,1/X}(X.\mathrm{Id}_d - M_P)$$
$$= \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 0 & X & 0 & 0 & b_1 + \frac{b_0}{X} \\ 0 & 0 & X & 0 & b_2 + \frac{b_1}{X} + \frac{b_0}{X^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X + b_{d-1} + \dots + \frac{b_0}{X^{d-1}} \end{pmatrix}$$

and thus

$$\begin{aligned}
&\det(Cl_{d,d-1,1/X}\dots Cl_{32,1/X}Cl_{21,1/X}(X.\mathrm{Id}_d - M_P))\\
&= \det(Cl_{d,d-1,1/X})\dots\det(Cl_{21,1/X})\det(X.\mathrm{Id}_d - M_P)\\
&= X^{d-1}\left(X + b_{d-1} + \ldots + \frac{b_0}{X^{d-1}}\right)\\
&= X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0
\end{aligned}.$$

Since $\det(Cl_{ij,\mu}) = 1$, we have $\det(X.\mathrm{Id}_d - M_P) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0$.

2. Expanding with the last column of $X.\mathrm{Id}_d - M_P$, we have

$$\begin{aligned}
&\det(X.\mathrm{Id}_d - M_P)\\
&= b_0(-1)^{1+d}\det\begin{pmatrix}-1 & X & 0 & 0\\ 0 & -1 & X & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\\
&+ b_1(-1)^{2+d}\det\begin{pmatrix}X & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & X & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} + \cdots\\
&+ (X + b_{d-1})(-1)^{d+d}\det\begin{pmatrix}X & 0 & 0 & 0\\ -1 & X & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & -1 & X\end{pmatrix}\\
&= b_0(-1)^{1+d}(-1)^{d-1} + b_1(-1)^{2+d}X(-1)^{d-2} + \cdots + (X + b_{d-1})(-1)^{d+d}X^{d-1}\\
&= b_0 + b_1X + \cdots + b_{d-1}X^{d-1} + X^d.
\end{aligned}$$

3. We know M_P inversible $\iff \det(M_P) \neq 0$. Let $X = 0$ in Question 2. We have $\det(-M_P) = (-1)^d\det(M_P) = b_0$, and thus $\det(M_P) \neq 0 \iff b_0 \neq 0$.
When $b_0 \neq 0$, from 10.1, we have

$$\begin{aligned}
&M_P^d + b_{d-1}M_P^{d-1} + \cdots + b_1M_P + b_0\mathrm{Id}_d = \mathbf{0_{d\times d}}\\
\iff &M_P\left(-b_0^{-1}(M_P^{d-1} + b_{d-1}M_P^{d-2} + \cdots + b_1)\right) = \mathrm{Id}_d.
\end{aligned}$$

Therefore, we have $M_P^{-1} = -b_0^{-1}(M_P^{d-1} + b_{d-1}M_P^{d-2} + \cdots + b_1\mathrm{Id}_d) = Q(M_P)$.