Cours Euler: Corrigé 18

le 25 janvier 2023

Exercice 1

(a) Les expressions πx^2, $x^3 + x^2 + x + 1$, $\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$ sont des polynômes, alors que $\dfrac{4}{x}$ n'en est pas un (on ne peut pas diviser par l'indéterminée x), $\sqrt[4]{x}$ non plus car on ne peut prendre de racines n-ème de l'indéterminée, et enfin $2^x + 2$ car cette expression *exponentielle* n'est pas polynomiale.

(b) Soit $K[x_1, \ldots, x_n]$ une algèbre de polynômes. Supposons que $f \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ est inversible, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme g tel que $f \cdot g = 1$. Notons que $f \neq 0$ car $0 \cdot g = 0$ et $0 \neq 1$. De même, $g \neq 0$. En utilisant que le degré d'un produit de deux polynômes non nuls égale la somme des degrés de ces deux polynômes, on déduit que

$$0 = \deg(1) = \deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g).$$

Ceci implique que $\deg(f) = 0$ car le degré d'un polynôme est un nombre positif. Or, le degré d'un polynôme est 0 si et seulement si ce polynôme est un nombre. Ainsi, f est un nombre.

(c)
a) $f = g$ si et seulement si $ax^2 + bx + c = 5x + 2$ si et seulement si $a = 0$, $b = 5$ et $c = 2$.

b) $f = g + h$ si et seulement si $ax^2 + bx + c = 9x^2 + 5x - 3$
si et seulement si $a = 9$, $b = 5$ et $c = -3$.

c) $f = g^2$ si et seulement si $ax^2 + bx + c = (5x + 2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$
si et seulement si $a = 25$, $b = 20$ et $c = 4$.

d) $bx + c = h$ si et seulement si a est un nombre réel quelconque, $b = 0$, $c = -5$ et $9 = 0$.
Mais $9 = 0$ n'est pas possible, donc pour tout nombre a, b et c, le polynôme $bx + c$ est toujours différent de h.

(d)
a) $f = g$ si et seulement si $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ry + s = 9xy - 6x^2 + 5$
si et seulement si $a = -6$, $b = 0$, $c = 9$, $d = 0$, $r = 0$ et $s = 5$.

b) $f = g + h$ si et seulement si $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ry + s = 9xy - 6x^2 + 5 - 7x - 5y$
si et seulement si $a = -6$, $b = 0$, $c = 9$, $d = -7$, $r = -5$ et $s = 5$.

c) $f = h^2$ si et seulement si $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ry + s = (-7x - 5y)^2 = 49x^2 + 70xy + 25y^2$
si et seulement si $a = 49$, $b = 25$, $c = 70$ et $d = r = s = 0$.

d) $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ry = g$ si et seulement si $a = -6$, $b = 0$, $c = 9$, $d = 0$, $r = 0$ et $0 = 5$.
Mais $0 = 5$ n'est pas possible, donc pour tout nombre a, b, c, d et r, le polynôme $x^2 + by^2 + cxy + dx + ry$ n'est jamais égal à g.

Exercice 2

(1) $a(ab) = a^2b$

(2) $2xy(3xy) = 6x^2y^2$

(3) $-2v \cdot 5v = -10v^2$

(4) $6m \cdot 6mn = 36m^2n$

(5) $\dfrac{c}{2} \cdot 20c = 10c^2$

(6) $-y \cdot y \cdot (-y) = -y^3$

(7) $(-r)(-t)(-4) = -4rt$

(8) $(6c)^2 = 36c^2$

(9) $(2a^2)^3 = 8a^6$

(10) $(4 \cdot 4)(5 \cdot 5) = 400$

(11) $x + 8z = x + 8z$

(12) $4m + 3m - 2m = 5m$

(13) $8y - 8y = 0$

(14) $1{,}5z + 3z + 4{,}5z = 9z$

(15) $3x + 4 + x - 5 = 4x - 1$

Exercice 3

(1) $y^3 3^{-4} x^5 3a^5 y^4 y^3 = 3^{-4} \cdot 3 \cdot a^5 \cdot x^5 \cdot y^3 y^4 y^3 = 3^{-3} a^5 x^5 y^{10}$
Le degré de ce polynôme est 15. C'est la somme des puissances des facteurs en x et y.

(2) $(a^2b^3)^{-5}(5b^3)^2 = 25a^{-10}b^{-15}b^6 = 25a^{-10}b^{-9}$
C'est un polynôme de degré 0.

(3) $3(x^2y^6)(y^3x)y^5 = 3x^2xy^6y^3y^5 = 3x^3y^{14}$
Le degré de ce polynôme est 17.

(4) $[(a^{\frac{1}{2}}x^2)(3a^2x)]^2 = [3a^2a^{\frac{1}{2}}x^3]^2 = 9a^4(a^{\frac{1}{2}})^2x^6 = 9a^4ax^6 = 9a^5x^6$
Le degré de ce polynôme est 6.

(5) $3a^2(4x)(a^0)^2 = 3a^2 4x \cdot 1^2 = 12a^2x$
Le degré de ce polynôme est 1.

Exercice 4

1. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. C'est un polynôme de degré 2.
2. $(2x - 5)^2 = 4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 25 = 4x^2 - 20x + 25$. C'est un polynôme de degré 2.
3. $(3 - x) \cdot (3 + x) = 9 - x^2 = -x^2 + 9$. C'est un polynôme de degré 2.
4. $(x + 1)^3 = (x^2 + 2x + 1)(x + 1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. C'est un polynôme de degré 3.
5. $(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$. C'est un polynôme de degré 2.
6. $4x \cdot (x + 2)^2 = 4x \cdot (x^2 + 4x + 4) = 4x^3 + 16x^2 + 16x$. C'est un polynôme de degré 3.

Exercice 5

Partie I.

(a) $x + (5x - 3) \overset{a}{=} (x + 5x) - 3 \overset{d}{=} (1 + 5)x - 3 = 6x - 3$

(b) $x \cdot (ax) \overset{a}{=} x \cdot a \cdot x \overset{c}{=} a \cdot x \cdot x = ax^2$

(c) $-x - (-x - x) \overset{d}{=} -x + x + x \overset{d}{=} (-1 + 1 + 1)x = 1 \cdot x = x$

(d) $25 \cdot \{9x \cdot [-2x \cdot (x \cdot 2)]\} \overset{a}{=} 25 \cdot 9x \cdot (-2) \cdot x \cdot x \cdot 2 \overset{c}{=} 25 \cdot 9 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x = -900x^3$

(e) $(x + 2y - 3) \cdot x - 2x^2 + 3x \overset{d}{=} x^2 + 2xy - 3x - 2x^2 + 3x \overset{c}{=} x^2 - 2x^2 - 3x + 3x - 2xy = -x^2 + 2xy$

Partie II.

1. $25 \cdot (-x) \cdot (2yx) \cdot (-3) \cdot [y^2 \cdot (-x)] \overset{a}{=} 25 \cdot (-x) \cdot 2 \cdot x \cdot y \cdot (-3) \cdot y^2 \cdot (-x) \overset{c}{=} -150x^3y^3$
2. $-(2x-5y+2)+5x^2-7\cdot(x+2y) \overset{d}{=} -2x+5y-2+5x^2-7x-14y \overset{c}{=} -2x-7x+5y-14y-2+5x^2 \overset{d}{=} -9x - 9y - 2 + 5x^2$

Exercice 6

Partie I.

1. $2x + 3y - 5x + 8 - 6y = -3x - 3y + 8$
   C'est un polynôme de degré 1. Les termes sont : $-3x$, $-3y$ et 8.
2. $19 - 2x^2 + 3x - 20 + 2x^2 - 6x + 3x^3 = 3x^3 - 3x - 1$
   C'est un polynôme de degré 3. Les termes sont : $3x^3$, $-3x$ et -1.
3. $y - x - x^2 - y^2 + 3y - 5x + xy = xy - x^2 - y^2 - 6x + 4y$
   C'est un polynôme de degré 2. Les termes sont : $-x^2$, $-y^2$, $-6x$, $4y$, et xy.
4. $ab + a^2 - 2b + 3ba + 4a^2b - 2a^2 = 4a^2b - a^2 + 4ab - 2b$
   C'est un polynôme de degré 3. Les termes sont : $4a^2b$, $-a^2$, $4ab$ et $-2b$.

Partie II.

1.
$$\begin{aligned}
2y^2 + 3x - 5x - 8y + 7xy - x^2y + 8x \cdot 5y &= -x^2y + 47xy + 2y^2 - 2x - 8y && \text{Ordonné} \\
&= 2y^2 - x^2y + 47xy - 8y - 2x && \text{Ordonné par rapport à } y \\
&= -x^2y + 47yx - 2x + 2y^2 - 8y && \text{Ordonné par rapport à } x
\end{aligned}$$

   C'est un polynôme de degré 3.
2.
$$\begin{aligned}
(3x)^2 - 5yx + 6x^2 - (5x) \cdot (3y) + 2y^2x &= 2y^2x - 20xy + 15x^2 && \text{Ordonné} \\
&= 2y^2x - 20xy + 15x^2 && \text{Ordonné par rapport à } y \\
&= 15x^2 + 2y^2x - 20yx && \text{Ordonné par rapport à } x
\end{aligned}$$

   C'est un polynôme de degré 3.
3.
$$\begin{aligned}
2a^2b - (ab)^2 - 5ab^2 + 2a^2 \cdot 3b^2 &= 5a^2b^2 - 5ab^2 + 2a^2b && \text{Ordonné} \\
&= 5b^2a^2 + 2ba^2 - 5b^2a && \text{Ordonnée par rapport à } a \\
&= 5a^2b^2 - 5ab^2 + 2a^2b && \text{Ordonnée par rapport à } b
\end{aligned}$$

   C'est un polynôme de degré 4.
4.
$$(z^2x)(2x) - (3zx)^2 + (6x^2) \cdot z^2 = 2x^2z^2 - 9x^2z^2 + 6x^2z^2 = -x^2z^2$$

   Cette expression est déjà ordonnée en même temps par rapport à x et z. C'est un polynôme de degré 4.
5.
$$\begin{aligned}
ab^2c + 4cb^2a - (2b) \cdot a \cdot 5c \cdot b + 6a^2bc - abc &= ab^2c + 4ab^2c - 10ab^2c + 6a^2bc - abc \\
&= -5ab^2c + 6a^2bc - abc && \text{Ordonné} \\
&= 6a^2bc - 5b^2ca - bca && \text{Ordonnée par rapport à } a \\
&= -5acb^2 + 6a^2cb - acb && \text{Ordonnée par rapport à } b \\
&= 6a^2bc - 5ab^2c - abc && \text{Ordonnée par rapport à } c
\end{aligned}$$

   C'est un polynôme de degré 4.

Exercice 7

Egalité de polynômes. On travaille dans $\mathbb{Q}[x]$. Calcule la valeur des nombres rationnels a, b, c, s'ils existent, tels que

$$(x-1)(x+a)(x+1) = x^3 + 2x^2 + bx + c$$

Il faut bien sûr développer la première expression pour pouvoir comparer les deux polynômes. Pour cela on utilise la distributivité et on assemble les termes semblables dès que possible pour simplifier l'écriture. Je choisis de d'abord calculer le produit des deux premiers polynômes :

$$(x-1)(x+a)(x+1) = (x^2 - x + ax - a)(x+1) = (x^2 + (a-1)x - a)(x+1)$$

et on continue

$$= x^3 + (a-1)x^2 - ax + x^2 + (a-1)x - a = x^3 + ax^2 - x - a$$

Deux polynômes écrits sous forme réduite sont égaux si et seulement s'ils sont composés de monômes égaux. Ainsi, pour que x^3+ax^2-x-a et x^3+2x^2+bx+c soient égaux il faut que $x^3 = x^3$, $ax^2 = 2x^2$, $-x = bx$ et $-a = c$. Par conséquent $a = 2$, $b = -1$ et $c = -2$.

Exercice 8

Réduction de monômes et de polynômes. On travaille dans $\mathbb{R}[x, y, z]$. Ecris le polynôme suivant sous forme réduite, indique son degré et la partie littérale de chaque terme.

$(x + y^2z)xyz(2x - 2zx) + 2(x^2y^3z^3 - x^2yz) = (x^2yz + xy^3z^2)(2x - 2zx) + 2x^2y^3z^3 - 2x^2yz$

$= 2x^3yz + 2x^2y^3z^2 - 2x^3yz^2 - 2x^2y^3z^3 + 2x^2y^3z^3 - 2x^2yz = 2x^3yz + 2x^2y^3z^2 - 2x^3yz^2 - 2x^2yz$

Sous forme réduite ce polynôme est cnstitué de quatre terme. Celui du plus haut degré est $2x^2y^3z^2$ dont le coefficient est 2 et le degré 7. Le degré du polyôme est donc 7.

Exercice 9

Identités remarquables.

1. $(x + 2) \cdot (x + 5) = x^2 + 2x + 5x + 10 = 10 + 7x + x^2$. C'est un polynôme de degré 2.
2. $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$. C'est un polynôme de degré 2.
3. $2x \cdot (y - 3) \cdot (y + 2) = 2x \cdot (y^2 - 3y + 2y - 6) = 2x \cdot (y^2 - y - 6) = -12x - 2xy + 2xy^2$. C'est un polynôme de degré 3.
4. $-5 \cdot (x^2 + x + 2) = -10 - 5x - 5x^2$. C'est un polynôme de degré 2.
5.
$$\begin{aligned}(2x+1)\cdot(x+5)\cdot(-x-2) &= (2x^2+10x+x+5)\cdot(-x-2)\\ &= (2x^2+11x+5)\cdot(-x-2)\\ &= -2x^3-4x^2-11x^2-22x-5x-10\\ &= -10-27x-15x^2-2x^3\end{aligned}$$

   C'est un polynôme de degré 3.
6. $(x+y)\cdot(x+y+z) = x^2+xy+xz+yx+y^2+yz = x^2+y^2+2xy+yz+xz$. C'est un polynôme de degré 2.
7. $(x^2 + y^2) \cdot (x + y) \cdot (x - y) = (x^2 + y^2) \cdot (x^2 - y^2) = -y^4 + x^4$. C'est un polynôme de degré 4.
8. $-5x \cdot (x-2)^2 \cdot x^2 = -5x \cdot (x^2-4x+4) \cdot x^2 = -5x^3 \cdot (x^2-4x+4) = -20x^3+20x^4-5x^5$. C'est un polynôme de degré 5.

9. $(x+y+z)^2 = (x+y+z)\cdot(x+y+z) = x^2+xy+xz+yx+y^2+yz+zx+zy+z^2 = 2xy+2yz+2xz+z^2+y^2+x^2$. C'est un polynôme de degré 2.
10. $(x+y-z)^2 = (x+y-z)\cdot(x+y-z) = x^2+xy-xz+yx+y^2-yz-zx-zy+z^2 = 2xy-2zx-2yz+z^2+y^2+x^2$. C'est un polynôme de degré 2.

Exercice 10

1. $(x^2+2x-5)-(3x-6+3x^2) = x^2+2x-5-3x+6-3x^2 = -2x^2-x+1$ C'est un polynôme de degré 2.
2. $(y-5+y^2)-(8+y^2+y) = y-5+y^2-8-y^2-y = -13$ C'est un polynôme de degré 0.
3. $-(z^2+(3z)^2-2.4z+b+\pi z) = -z^2-9z^2+2.4z-b-\pi z = -10z^2+(2.4-\pi)z-b$ C'est un polynôme de degré 2.
4. $z^3-(z^4-(ya)^2+3\cdot(z+y^2)) = z^3-z^4+a^2y^2-3z-3y^2 = -z^4+z^3+(a^2-3)y^2-3z$ C'est un polynôme de degré 4.
5. $y+2xy-\frac{4}{7}(5x-\frac{3}{27})-(x+2.\overline{5}) = y+2xy-\frac{20}{7}x+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{9}-\frac{7}{7}x-2.\overline{5} = 2xy+y-\frac{27}{7}x+\frac{4}{63}-2.\overline{5}$ C'est un polynôme de degré 2.

Exercice 11

Exercice 2.2.7

1) La formule pour f est
$$f(n) = n+1.$$
$f(1)=2,\ f(8)=9,\ f(16)=17,\ f(35)=36,\ f(100)=101$

2)
$$f(n) = 3n$$
$f(1)=3\cdot 1=3,\ f(8)=3\cdot 8=24,\ f(16)=3\cdot 16=48,\ f(35)=3\cdot 35=105,\ f(100)=3\cdot 100=300$

3)
$$f(n) = 2n-1$$
$f(1)=1,\ f(8)=2\cdot 8-1=15,\ f(16)=2\cdot 16-1=31,\ f(35)=2\cdot 35-1=69,\ f(100)=2\cdot 100-1=199$

4) $f(1)=1=1^2,\ f(8)=4=2^2,\ f(16)=16=4^2,\ f(35)=25=5^2,\ f(100)=100=10^2$

5)
$$f(n) = \mathrm{ppcm}(n,20)$$
$f(1)=\mathrm{ppcm}(1,20)=20,\ f(8)=\mathrm{ppcm}(8,20)=40,\ f(16)=\mathrm{ppcm}(16,20)=80,\ f(35)=\mathrm{ppcm}(35,20)=140,\ f(100)=\mathrm{ppcm}(100,20)=100$

6) $f(1)=1,\ f(8)=1,\ f(16)=2,\ f(35)=2,\ f(100)=3.$

7)
$$f(n) = \min\{m\in\mathbb{N} | m\geq n,\ \text{il existe } k \text{ tel que } m=7k\}$$
$f(1)=7,\ f(8)=14,\ f(16)=21,\ f(35)=35,\ f(100)=105$

Exercice 2.2.8

1)
$$f(n) = n^2$$
$f(1)=1,\ f(8)=8^2=64,\ f(20)=20^2=400,\ f(63)=63^2=3969,\ f(100)=100^2=10000$

2) $f(1) = 1$, $f(8) = 1$, $f(20) = 6$, $f(63) = 0$, $f(100) = 2$

3) Pour trouver $f(n)$, il faut trouver tous les diviseurs de n, puis les compter.
$f(1) = 1$, $f(8)$: Ici, 1, 2, 4 et 8 sont tous les diviseurs de 8. Donc $f(8) = 4$.
$f(20)$: les diviseurs de 20 sont 1, 2, 4, 5, 10 et 20. Donc $f(20) = 6$.
$f(63)$: les diviseurs de 63 sont 1, 3, 7, 9, 21 et 63. Donc $f(63) = 6$.
$f(100)$: les diviseurs de 100 sont 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 et 100. Donc $f(100) = 9$.

4)
$$f(n) = \text{pgcd}(60, n)$$
$f(1) = 1$, $f(8) = 4$, $f(20) = 20$, $f(63) = 3$, $f(100) = 20$

5) $f(1) = 2$ (1 n'est pas un nombre premier), $f(8) = 11$, $f(20) = 23$, $f(63) = 67$, $f(100) = 101$.

6) Pour trouver $f(n)$, il faut lister tous les multiples de n inférieurs à 100, puis tous les compter.
$f(1)$: tous les nombres entiers naturels inférieurs à 100 sont multiples de 1. Donc $f(n) = 99$.
$f(8)$: les multiples de 8 inférieurs à 100 sont 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88 et 96. Donc $f(8) = 12$.
$f(20)$: les multiples de 20 inférieurs à 20 sont 20, 40, 60 et 80. Autrement dit : $f(20) = 4$.
$f(63)$: le seul multiple de 63 inférieur à 63 est 63. Donc $f(63) = 1$.
$f(100)$: il n'y a pas de multiple de 100 inférieur à 100. Donc $f(100) = 0$.

7) Pour trouver $f(n)$, on liste tous les nombres premiers qui lui sont inférieurs, puis on les compte.
$f(1)$: Il n'y a pas de premiers inférieurs à 1. Donc $f(1) = 0$.
$f(8)$: Les premiers inférieurs à 8 sont 2, 3, 5 et 7. Donc $f(8) = 4$.
$f(20)$: Les premiers inférieurs à 20 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19. Donc $f(20) = 8$.
$f(63)$: Les premiers inférieurs à 63 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59 et 61. Il y en a 18, donc $f(63) = 18$.
$f(100)$: Les premiers inférieurs à 100 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97. Il y en a 25, donc $f(100) = 25$.