

Cours Euler: Corrigé 19

le 1er février 2023

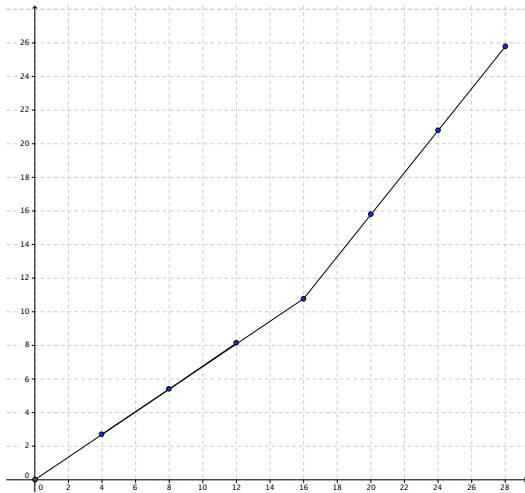
Exercice 1

Graphe de fonction I.

fonction	graphique
$A : y = -2x$	3
$B : y^2 = x$	4
$C : y = \frac{1}{x}$	6
$D : y = -x^2$	2
$E : y = \sqrt{x}$	1
$F : y = -x + 2$	5

Le graphe 4 qui correspond à la relation $y^2 = x$ n'est pas celui d'une fonction. La droite verticale d'abscisse 1 par exemple passe par deux points : l'image de 1 n'est pas bien définie.

Exercice 2



On reporte les points sur le graphe (ou l'axe des abscisses représente le volume d'eau en dl et l'axe des ordonnées celui de la hauteur en cm). On observe que les quatre premiers points sont alignés et les quatre derniers également. Cela signifie que le vase a une largeur constante jusqu'à 10,8 cm, puis il se resserre (car le vase se remplit plus vite dès ce moment) et continue avec une largeur constante.

Ainsi, pour 50 cl on atteindra une hauteur de 34 mm environ, pour 130cl ce sera 88 mm et enfin pour 260cl on atteindra 233 mm.

Exercice 3

Injection et surjection.

- « traverse » n'est pas une fonction car l'image du Rhin n'est pas bien définie puisque le Rhin passe par Bâle, Bonn, Rotterdam, etc.
- L'identité est une fonction vue en cours. Elle est injective et surjective.
- Le plus petit élément de l'ensemble $A \subset \mathbb{N}$ existe et est unique si bien que cette association définit une fonction. Elle est surjective parce que $f(\{n\}) = n$ pour tout n . Elle n'est pas injective puisque $f(\mathbb{N}) = 0 = f(\{0\})$.
- Ce n'est pas une fonction car il existe des nombres à 7 chiffres qui ne sont pas attribués à des téléphones.
- Ce n'est pas une fonction car il existe certainement une voiture que personne ne conduisait hier à l'heure indiquée.

6. Ceci définit une fonction par la formule $f(a) = a^2$. Elle n'est pas surjective car -1 n'est pas un carré. Elle n'est pas injective car $f(1) = 1 = f(-1)$.
7. f n'est pas une fonction puisque $f(-1)$ n'est pas déterminé par l'association (-1 n'est pas un carré dans \mathbb{Z}).
8. f n'est pas une fonction puisque $f(4)$ n'est pas déterminé (cela pourrait être 2 ou -2).
9. f n'est pas une fonction puisque $f(2)$ n'est pas déterminé par l'association ($\sqrt{2}$ n'est pas un élément de \mathbb{N}).
10. f est la fonction $\sqrt[3]{x}$. Elle est injective et surjective. En effet l'équation $y = \sqrt[3]{x}$ a une unique solution pour tout nombre réel y .

Exercice 4

Représentation schématique d'une fonction.

Exercice 2.2.3

	Correspondance	est une fonction
1)	\mathcal{A}	non
	\mathcal{B}	non
	\mathcal{C}	oui
	\mathcal{D}	oui

Relation \mathcal{A} : le 1er axiome de la définition de fonction n'est pas vérifié, il y a un élément de l'ensemble de départ qui n'est en relation avec aucun élément de l'ensemble d'arrivée.

Relation \mathcal{B} : le 2ème axiome de la définition de fonction n'est pas vérifié, il y'a un élément de l'ensemble de départ qui est en relation avec deux éléments différents de l'ensemble d'arrivée.

	Correspondance	est une fonction
2)	\mathcal{A}	oui
	\mathcal{B}	oui
	\mathcal{C}	oui
	\mathcal{D}	oui

Exercice 5

Exercice 2.2.9

1) On note (pour simplifier les notations usuelles) une fonction $f : E \longrightarrow F$ par

$$(a, b, c) \mapsto (g, g, h)$$

ce qui signifie $f(a) = g, f(b) = g$ et $f(c) = h$. Toutes les fonctions de E dans F sont les suivantes :

$$\begin{matrix} (a, b, c) \mapsto (g, g, g) & (a, b, c) \mapsto (g, g, h) & (a, b, c) \mapsto (g, h, g) & (a, b, c) \mapsto (h, h, g) \\ (a, b, c) \mapsto (g, h, h) & (a, b, c) \mapsto (h, g, g) & (a, b, c) \mapsto (h, g, h) & (a, b, c) \mapsto (h, h, h) \end{matrix}$$

2)

$$\begin{matrix} (a, b) \mapsto (g, g) & (a, b) \mapsto (g, h) & (a, b) \mapsto (g, i) \\ (a, b) \mapsto (h, g) & (a, b) \mapsto (h, h) & (a, b) \mapsto (h, i) \\ (a, b) \mapsto (i, g) & (a, b) \mapsto (i, h) & (a, b) \mapsto (i, i) \end{matrix}$$

3)

$$\begin{array}{ll} (a, b) \mapsto (g, g) & (a, b) \mapsto (g, h) \\ (a, b) \mapsto (h, g) & (a, b) \mapsto (h, h) \end{array}$$

Avant de passer à la suite, donnons une méthode pour calculer le nombre de fonctions d'un ensemble fini A vers un ensemble fini B en montrons l'énoncé suivant :

Soit n la cardinalité de A (ie le nombre d'éléments de A) et m la cardinalité de B . Alors le nombre de fonctions de A dans B est m^n .

Preuve : Supposons d'abord que A possède un seul élément : A peut donc s'écrire $A = \{a\}$. Alors il y a m fonctions de A vers B . En effet, nous avons $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, donc si $f : A \rightarrow B$ est une fonction, alors les possibilités pour $f(a)$ sont (b_1, b_2, \dots, b_m) (essayer de se convaincre avec $m = 4$ par exemple). On peut donc représenter ceci sous forme d'un tableau :

$a \mapsto$	b_1	b_2	b_3	b_4
$f(a)$		X		

Où le "X" sous b_2 signifie $f(a) = b_2$. Ici il y a 4 choix pour placer X.

Maintenant supposons que A possède deux éléments, ie $A = \{a_1, a_2\}$. Faisons le tableau des possibilités de fonctions de A dans B :

$a_1, a_2 \mapsto$	b_1	b_2	b_3	b_4
$f(a_1)$		X		
$f(a_2)$	X			

Si on fixe $f(a_2)$ et qu'on fait bouger $f(a_1)$, alors on constate qu'il y a m possibilités pour $f(a_1)$. Donc dès qu'on a choisit une valeur pour $f(a_2)$, alors on peut choisir une valeur parmi m pour $f(a_1)$, ie il y a m choix possibles. Comme il y a m choix possibles pour $f(a_2)$, alors il y a en tout m^2 choix possibles. Dans le cas où $m = 4$ (tableau ci-dessus), on voit bien qu'il y a $16 = 4^2$ possibilités pour mettre un X par ligne.

Rajoutons encore un élément dans A : $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Comme avant, si on fixe $f(a_2)$ et $f(a_3)$, alors il y a m possibilités pour choisir $f(a_1)$. Si $f(a_3)$ reste fixé et qu'on bouge $f(a_1)$ et $f(a_2)$, alors on a m^2 choix possibles pour $f(a_1)$ et $f(a_2)$. Comme on a m choix possibles pour $f(a_3)$ et que pour chaque $f(a_3)$ on a m^2 choix possibles pour $f(a_1)$ et $f(a_2)$, alors on a m^3 choix possibles pour $f(a_1)$, $f(a_2)$ et $f(a_3)$. Le cas $m = 4$ est représenté dans le tableau ci-dessus :

$a_1, a_2 \mapsto$	b_1	b_2	b_3	b_4
$f(a_1)$		X		
$f(a_2)$	X			
$f(a_3)$		X		

Dans chaque ligne il y a 4 choix possibles pour placer X. Comme il y 3 lignes, alors il y a au total $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ choix possibles au total.

Maintenant, dans le cas où A contient un nombre n d'éléments, le raisonnement pour trouver le nombre de fonctions de A dans B est exactement le même que précédemment :

Fixons $f(a_n), f(a_{n-1}), \dots, f(a_2)$. On a alors m choix pour $f(a_1)$.

Si on fait en plus bouger $f(a_2)$, alors on a m^2 choix pour $f(a_1)$ et $f(a_2)$.

Si on fait en plus bouger $f(a_3)$, alors on a m^3 choix pour $f(a_1)$, $f(a_2)$ et $f(a_3)$. etc ...

Si finalement on fait bouger $f(a_n)$, alors on a m^n choix possibles pour $f(a_1)$ à $f(a_n)$.

Le tableau ci-dessous résume la situation :

$a_1, a_2 \mapsto$	b_1	b_2	b_3	b_4
$f(a_1)$		X		
$f(a_2)$	X			
\vdots				
$f(a_n)$		X		

Donc le nombre de fonctions de A dans B est m^n .

- 4) La cardinalité de E est 6, celle de F est 2. Donc le nombre de fonctions de E dans F est $2^6 = 64$.
- 5) La cardinalité de E est 3, celle de F est 4. Donc le nombre de fonctions de E dans F est $4^3 = 64$.
- 6) La cardinalité de E est 2, celle de F est 6. Donc le nombre de fonctions de E dans F est $6^2 = 36$.

Exercice 6

Un peu de théorie.

- (a)1. G_f est bien le graphe d'une fonction.
2. G_f ici n'est pas le graphe d'une fonction, car l'élément $b \in A$ est en relation avec deux éléments différents de B , et l'élément $c \in A$ n'est en relation avec rien.
3. G_f n'est pas le graphe d'une fonction, car l'élément $b \in A$ est en relation avec deux éléments différents de B .
- (b)1. $f(a) = a + 4$ est une bijection : pour tout nombre entier b l'unique nombre entier dont l'image est b est $b - 4$, c'est-à-dire $f(b - 4) = b$.
2. $f(a) = 4a$ n'en est pas une : le nombre 1 n'est pas l'image d'un nombre entier. Seuls les multiples de 4 sont atteints par f .
3. $f(a) = a^2$ n'en est pas une : on a $f(1) = f(-1)$ ce qui contredit l'injectivité.
4. $f(a) = -a$ est une bijection : pour tout $b \in \mathbb{Z}$, le seul nombre dont l'image est b est le nombre $-b$.
5. Le reste de la division par 10 n'est pas injectif : $f(10) = 0 = f(20)$.
6. $f(a) = a^3$ n'est pas surjectif : de nombreux nombres entiers ne sont pas des cubes, comme 2 par exemple.
7. $f(a) = |a|$ n'est pas injectif : $f(10) = 10 = f(-10)$.

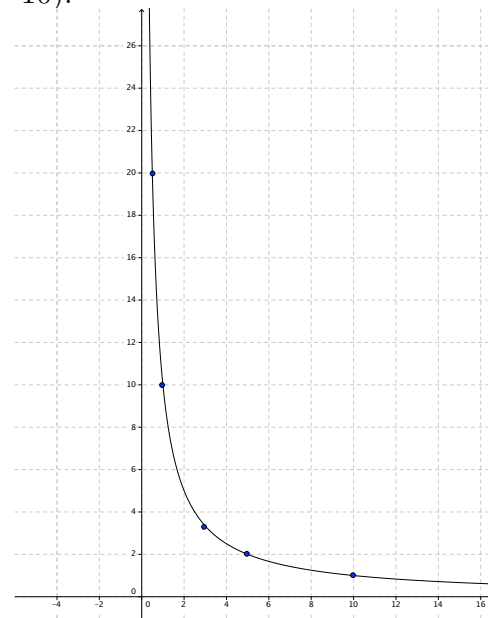
Exercice 7

Un problème géométrique.

Voici le tableau de correspondance entre x et y

x	0,5	1	3	5	10
y	20	10	$3\frac{1}{3}$	2	1

La formule qui exprime y en fonction de x est la fonction $f(x) = \frac{10}{x}$. On la déduit du fait que $xy = 10$. Elle n'a de sens géométrique que pour des valeurs $x > 0$.



Exercice 8

1. f n'est pas surjective, car aucun élève du cours Euler n'a plus que 20 ans. La fonction n'est pas injective, car il y a des élèves qui ont le même âge. Ainsi f n'est pas bijective.
2. g est surjective, car chaque pays possède au moins une ville. g n'est pas injective car un pays peut avoir plusieurs villes différentes. Donc g n'est pas bijective.
3. h est injective car chaque pays a une seule capitale. h est aussi surjective car chaque pays a une capitale. Ainsi h est bijective.

4. i n'est probablement pas une fonction car elle n'est pas définie pour les élèves très jeunes. Si elle était bien définie, alors i se serait pas injective car deux élèves différents peuvent avoir 13 ans. i est surjective car il y a au moins un élève du cours Euler qui a 15 ans. Donc i n'est pas bijective.

5. Avant de commencer l'exercice, rappelons ce qu'est la représentation binaire à 8 chiffres d'un caractère et l'ASCII :

La représentation binaire d'un nombre entier naturel est la manière informatisée d'écrire un entier naturel. En informatique, l'information (ie un texte, une image, ...) est stockée sous forme de séquences de 0 et de 1. En particulier, le nombre 0 est représenté par la séquence 00000000, 1 par 00000001, 2 par 00000010, 3 par 00000011, etc ...

On désigne par "ASCII" la codification qui associe à chaque caractère sa représentation binaire. En ASCII, 0 est bien représenté par 00000000.

Autrement dit, ASCII est bien une fonction de $\{0, 1, 2, \dots, 255\}$ vers l'ensemble des représentations binaires à 8 chiffres.

ASCII est injective, car à chaque représentation binaire il n'y correspond qu'au plus un caractère.

ASCII est surjective, car il y a $2^8 = 256$ représentations possibles à 8 chiffres (ie il y a 2^8 séquences de 0 et de 1 longues de 8 caractères possibles). Donc ASCII est bijective.

6. T n'est pas surjective, car une température ne peut pas être trop grande (par exemple, il ne peut pas faire $100000^\circ C$ sur Terre). T n'est pas injective : il peut faire la même température à deux minutes différentes d'un jours. Donc T n'est pas bijective.

7. j est injective car un numéro de natel ne peut pas appartenir à deux élèves différents. j n'est pas surjective, car tous les numéros à 10 chiffres ne sont pas de numéros de natel. Donc j n'est pas bijective.

8. k est injective : Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $k(x) = k(y)$. Alors $2x = 2y$ donc $x = y$.

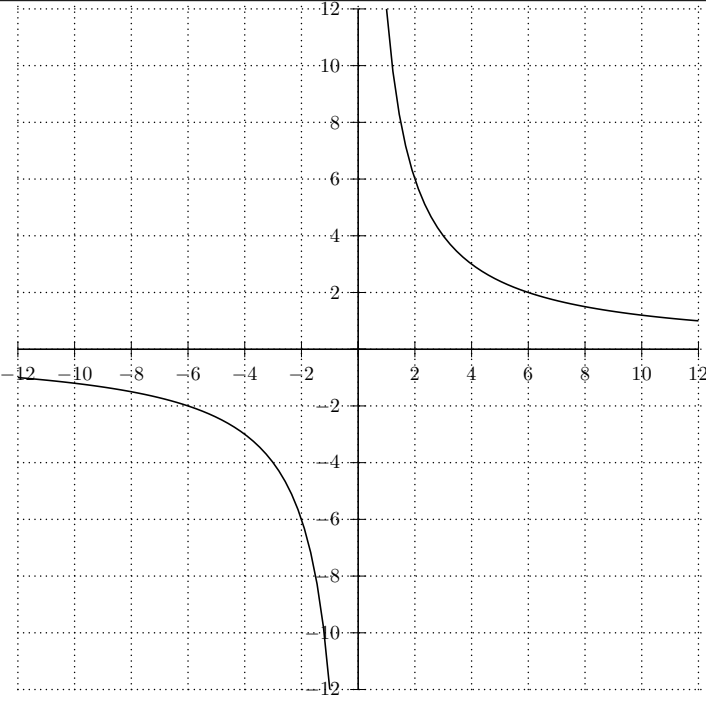
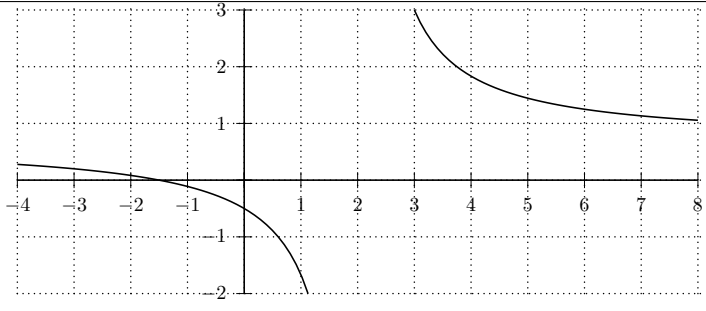
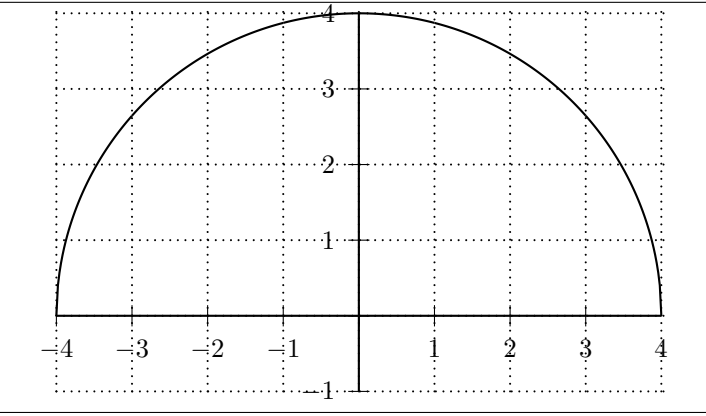
k est surjective : Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors $k(\frac{y}{2}) = y$, donc y a une préimage.

Donc k est bijective.

Exercice 9

Quelques fonctions. Pour tracer le graphe de ces fonctions, on choisira quelques points, certains négatifs, d'autres positifs, en se demandant s'ils font bien partie de l'ensemble de définition de la fonction étudiée. On se gardera de conclure trop vite que le graphe est une droite, mais on essaiera de vérifier la justesse de son intuition en vérifiant si le graphe correspond à la fonction (en testant un autre point par exemple).

Fonction	Ensemble de définition	graphe
$x \mapsto \sqrt{x^2}$	$A = \mathbb{R}$	
$x \mapsto \sqrt[3]{x}$	$A = \mathbb{R}$	

$x \mapsto \frac{12}{x}$	$A = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	
$x \mapsto \frac{2x+3}{3x-6}$	$A = \mathbb{R} \setminus \{2\}$	
$x \mapsto \sqrt{16 - x^2}$	$A = [-4, 4]$	

Exercice 10

Le graphique des cambriolages a l'air beaucoup plus haut en 1999 qu'en 1998. Pourtant on remarque que l'échelle des ordonnées n'est pas respectée ! La différence entre les deux années n'est que de 8 cambriolages, ce qui représente une augmentation de

$$\frac{8}{508} = 0,0157 \cong 1,57\%$$

Le système d'axes utilisé n'a pas placé l'origine au point $(0, 0)$, mais environ au point $(1997, 500)$, ce qui rend la comparaison visuelle trompeuse, d'autant plus qu'il vaudrait mieux comparer avec plus d'une année de référence....

Exercice 11

Composition de fonctions I. On choisit des ensembles de définition maximaux.

- 1) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x + 4$ est \mathbb{R} .
L'ensemble de définition de la fonction g définie par $x \mapsto x^2$ est \mathbb{R} .
Donc la composée $g \circ f$ est définie sur \mathbb{R} . On considère alors $g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 4) = (x + 4)^2$.
- 2) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x + 1$ est \mathbb{R} .
L'ensemble de définition de la fonction g définie par $x \mapsto 1/x$ est \mathbb{R}^* .
Donc la composée $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On considère alors $g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^* \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = \frac{1}{x+1}$.
- 3) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x^2$ est \mathbb{R} .
L'ensemble de définition de la fonction g définie par $x \mapsto x - 2$ est \mathbb{R} .
Donc la composée $g \circ f$ est définie sur \mathbb{R} . On considère alors $g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 2 = (x^2 - 2) - 2 = x^2 - 4$.
- 4) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x - 2$ est \mathbb{R} .
L'ensemble de définition de la fonction g définie par $x \mapsto 2 \cdot x$ est \mathbb{R} .
L'ensemble de définition de la fonction h définie par $1/x$ est \mathbb{R}^* .
Donc la composée $h \circ g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. On considère alors $h \circ g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}^*$, définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = h(g(x - 2)) = h(2 \cdot (x - 2)) = \frac{1}{2 \cdot (x - 2)}$.
- 5) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x^2$ est \mathbb{R} .
Donc la composée $f \circ f \circ f$ est définie sur \mathbb{R} . On considère alors $f \circ f \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x^2)) = f((x^2)^2) = f(x^4) = (x^4)^2 = x^8$.
- 6) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x - 5$ est \mathbb{R} .
L'ensemble de définition de la fonction g définie par $x \mapsto x^2$ est \mathbb{R} .
Donc la composée $g \circ f$ est définie sur \mathbb{R} . On considère alors $g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 5) = (x - 5)^2$.
- 7) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto 1/x$ est \mathbb{R}^* .
Donc la composée $f \circ f$ est définie sur \mathbb{R}^* . On considère alors $f \circ f : \mathbb{R}^* \xrightarrow{f} \mathbb{R}^* \xrightarrow{f} \mathbb{R}^*$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1/x) = x$.

Exercice 12

Composition de fonctions II. Il y a toujours plusieurs solutions possibles ici. Les solutions suivantes ne sont donc pas uniques.

- (a) $f(x) = x + 2, g(x) = x^2, A = B = C = \mathbb{R}$
- (b) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x^2, A = \mathbb{R} \setminus \{0\}, B = C = \mathbb{R}$
- (c) $f(x) = x^2, g(x) = x + 2, A = B = C = \mathbb{R}$
- (d) $f(x) = x^2 + 2, g(x) = \frac{1}{x}, A = C = \mathbb{R}, B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- (e) $f(x) = (x + 2)^2, g(x) = \frac{1}{x}, A = \mathbb{R} - \{-2\}, B = \mathbb{R} \setminus \{0\}, C = \mathbb{R}$