Cours Euler: Série 20

le 8 février 2023

Exercice 1

Composition de fonctions III.

(a) On considère les fonctions

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+5 \end{array} \quad \text{et} \quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & y^2 \end{array}$$

Calcule la composition $g \circ f$. Est-elle définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ou faut-il restreindre à un sous-ensemble de $\mathbb{R}$?

(b) Même question avec les fonctions x^2 et $y + 5$.

(c) Même question avec les fonctions $x + 1$ et $\dfrac{1}{y}$.

(d) Même question avec les fonctions $x - 1$ et $y^2 - 2y + 1$.

(e) On considère les fonctions

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array} \quad \text{et} \quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 3y+2 \end{array}$$

Calcule $f[g(1)]$, $g[f(1)]$, $f[g(-2)]$, $f[g(-3)]$, $(g \circ f)(0)$, $(g \circ f)(0{,}5)$, $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(8)$.

Exercice 2

FA48 Que d'accidents !

Voici un tableau indiquant le nombre d'accidents de la route ayant fait des victimes, de 1999 à 2009, dans les cantons de Vaud, du Valais et de Genève.

Années	Nombres d'accidents avec victimes
1999	4510
2000	4779
2001	4656
2002	4712
2003	4530
2004	4390
2005	3958
2006	3939
2007	4124
2008	3872
2009	3775

a) A l'aide d'un tableur, réalise un diagramme cartésien montrant l'évolution du nombre d'accidents ayant causé des victimes, de 1999 à 2009.

b) Que peux-tu dire de l'évolution du nombre d'accidents ?

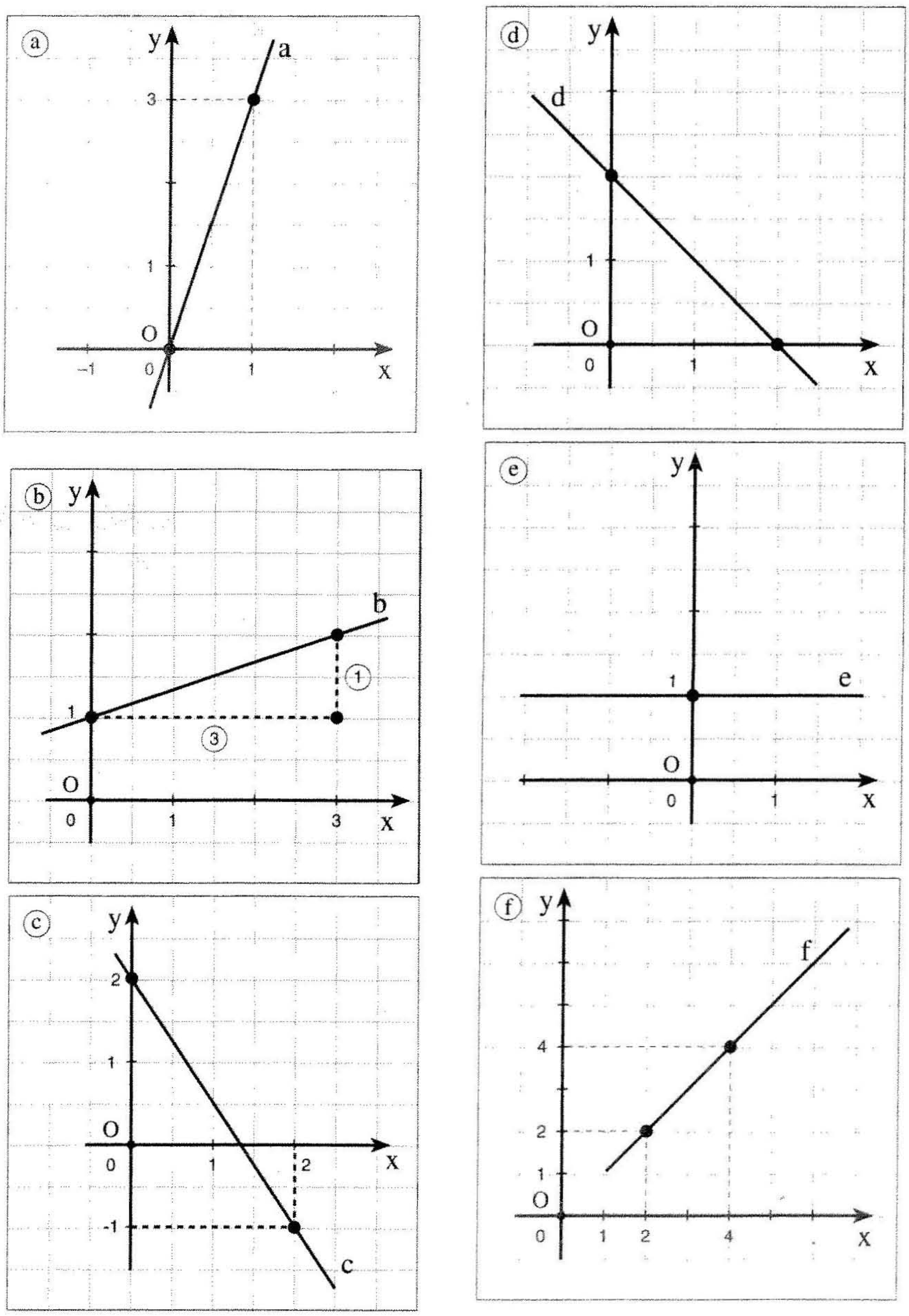
Exercice 3

Justifie !

380. Associe une équation à une droite dessinée :

1) $y = \dfrac{4-3x}{2}$ 3) $y = \frac{1}{3}x + 1$ 5) $y = 3x$

2) $y = -x + 2$ 4) $y = x$ 6) $y - 1 = 0$.



Exercice 4

Fonctions affines et linéaires. Dessine les graphes des fonctions suivantes. Lesquelles sont affines ? Lesquelles sont linéaires ? Détermine ensuite quels points parmi $A = (0;3)$, $B = (0;0)$, $C = (4;3)$, $D = (4;-2)$, $E = (-3;11)$ appartiennent au graphe de l'une ou l'autre de ces fonctions.

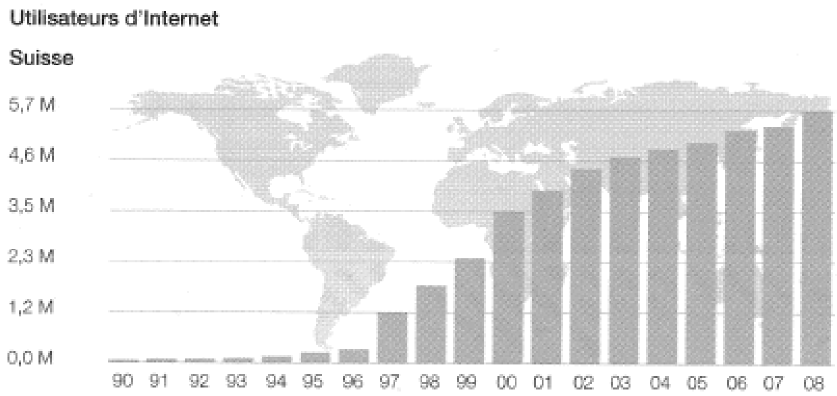
1. $\begin{array}{rcl} a\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -3x \end{array}$
2. $\begin{array}{rcl} b\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -3x+2 \end{array}$
3. $\begin{array}{rcl} c\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \end{array}$
4. $\begin{array}{rcl} d\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3}{4}x \end{array}$

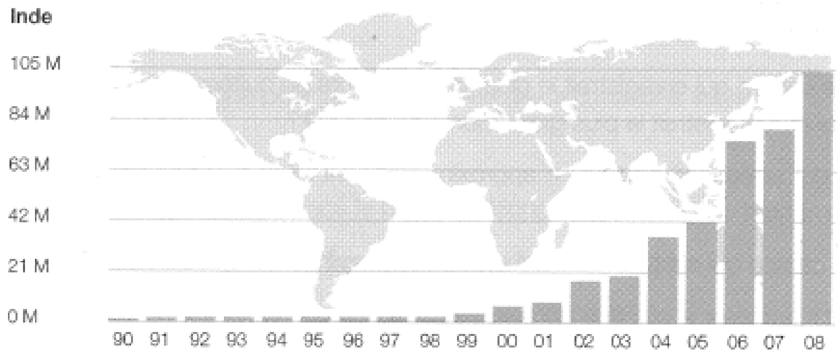
Exercice 5

FA54 Internet

Le diagramme en colonnes ci-dessous indique l'évolution du nombre d'utilisateurs d'Internet, en Suisse et en Inde, entre les années 1990 et 2008.

Unité : M = million





a) Estime par combien le nombre d'utilisateurs d'Internet a été multiplié, en Suisse et en Inde, entre 2003 et 2008. Comment, d'après toi, peut-on expliquer cette différence ?

b) Sachant que la population de la Suisse est d'environ 7,7 millions d'habitants en 2008, dirais-tu que beaucoup ou peu d'habitants de notre pays ont accès à Internet ? Justifie ta réponse.

c) Sachant que la population de l'Inde est d'environ 1,15 milliard d'habitants en 2008, dirais-tu que beaucoup ou peu d'habitants de ce grand pays d'Asie ont accès à Internet ? Justifie ta réponse.

d) En t'aidant des deux diagrammes, imagine le nombre d'utilisateurs d'Internet qu'il y aura en Suisse et en Inde en 2020, en justifiant ta réponse.

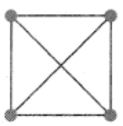
Exercice 6

L'équation d'une parabole. On considère la droite horizontale h d'équation $y = 2$ et le point F de coordonnées $(2; 1)$. On cherche à décrire la parabole qui est constituée des points équidistants de h et de F. Autrement dit on cherche le *lieu géométrique* des points P de coordonnées $(x; y)$ tels que $d(P; h) = d(P; F)$. Trouve la fonction quadratique dont le graphe est cette parabole.

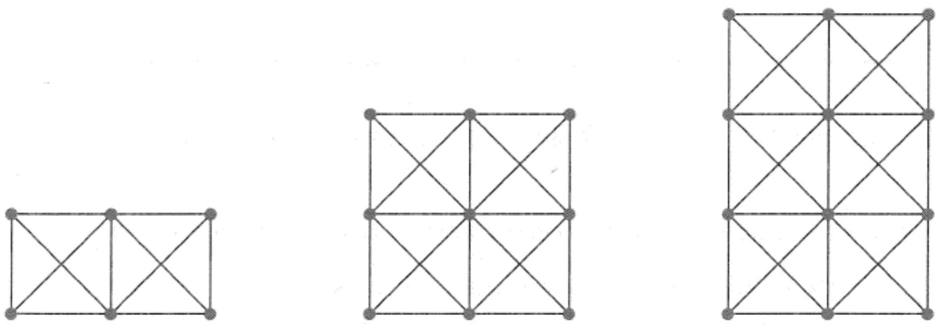
Indication. Simplifie-toi la vie en étudiant l'équation $d(P; h)^2 = d(P; F)^2$ et exprime l'ordonnée y en fonction de l'abscisse x.

Exercice 7

Un élément de ce motif est constitué d'un carré et de ses diagonales.



On les empile ainsi :



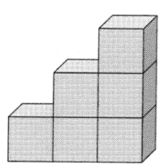
1re étape 2e étape 3e étape

Combien comptera-t-on d'éléments de motif à la 10e étape ? A la 25e ? Et à la 2011e ?

Et de diagonales ? Et de points verts ?

Explique ta démarche.

On considère ensuite un escalier construit avec des cubes identiques. Celui-ci est haut de trois marches



Combien faut-il de cubes pour construire un escalier de 1500 marches de hauteur ?

Exercice 8

1. Détermine la fonction affine dont le graphe passe par $(0; 3)$ et dont la pente vaut -2.

2. Détermine la fonction affine dont le graphe passe par $(2; 3)$ et $(-2; 1)$.

3. Détermine t si le point $(1; 4)$ appartient au graphe de la droite d'équation $y = 3x + t$.

4. Détermine k si la droite d'équation $y = kx + 3$ est parallèle à l'axe des x.
5. Détermine a si la droite d'équation $y = ax - t$ est perpendiculaire à la droite d'équation $y = 2x + 1$.
6. Détermine le nombre s si $B = (5; \frac{s}{2})$ est un point de la droite d'équation $2x - 3y + 6 = 0$.

A partir d'ici les exercices sont des problèmes de test d'autres années. Gardez-les pour vous entraîner quand vous êtes prêts. Ces exercices ne seront pas corrigés.

Exercice 9

Les nombres réels. (21 points) On lit dans le journal Le Monde du 15 février : Cérès est une planète naine, orbitant dans la ceinture d'astéroïdes entre Mars et Jupiter, à environ 360 millions de kilomètres du Soleil. Son diamètre est de 950 kilomètres, et elle représente le tiers de la masse de la ceinture d'astéroïdes. Dans le journal Science du 17 février, des chercheurs italiens et américains de la NASA et de l'Institut d'astrophysique et de planétologie spatiale de Rome (IAPF) expliquent y avoir détecté, pour la première fois, la présence de molécules organiques.

(1) (16 points) Sachant que la vitesse de la lumière vaut 300'000'000 m/s (mètres par seconde), calcule le temps qu'il faut, en minutes, pour qu'un rayon de Soleil parvienne sur Cérès.
(2) (5 points) L'orbite de Cérès autour du Soleil n'est pas circulaire et sa distance maximale au Soleil est $414'103'605,89742368584$ km. Approxime ce nombre au centième.

Exercice 10

Egalité de polynômes. (12 points) On travaille dans $\mathbb{R}[x]$. Calcule toutes les valeurs possibles des nombres réels a et b pour que les polynômes $p = x^2 + (3 - a)x - 7$ et $q = (x - b)(x + b)$ soient égaux.

Exercice 11

Réduction de monômes et de polynômes. (21 points)

(1) (6 points) Dans $\mathbb{R}[x, y]$ quels sont les degré et coefficient du monôme $-3xyx(\sqrt{3}\,x^2y^3)(-\sqrt{5}\,x)$?
(2) (5 points) Dans $\mathbb{Z}[x, y, z]$ écris le polynôme $(2x + 3y)(3x - 2y)$ sous forme réduite.
(3) (10 points) Dans $\mathbb{R}[x]$ écris le polynôme $(x + 3)(x + 3)(1 - x)(x - 2)$ sous forme ordonnée et réduite.

Exercice 12

Un peu de théorie. (28 points)

(1) (5 points) Donne la définition de $x^{-\frac{11}{4}}$ en termes de puissances et de racines. Pour quelles valeurs de x cette expression a-t-elle un sens ?
(2) (8 points) Démontre que $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$ pour tous les nombres réels x et y en te basant sur des propriétés des puissances entières.
(3) (15 points) Démontre que $\sqrt{7}$ n'est pas un nombre rationnel. Il n'est pas nécessaire de démontrer les propriétés de divisibilité utilisées.

Exercice 13

Vrai ou Faux (20 points) Justifie brièvement chaque réponse.

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\sqrt[4]{x^4} = \mid x \mid$.
(2) On a $\sqrt{13} > 3{,}5$.
(3) Il existe un polynôme $p \in \mathbb{R}[x]$ tel que $p^2 = x^2 + 6x + 9$.
(4) Il existe un polynôme $p \in \mathbb{R}[x]$ tel que $p^2 = x + 100$.

Exercice 14

Simplification. Ecris le nombre réel $\dfrac{5}{\sqrt[7]{125}\sqrt[7]{5}}$ en faisant disparaître les racines du dénominateur.

Exercice 15

Un exercice proposé par les Olympiades suisses de mathématiques (2015). Soient a, b et c des nombres naturels tels que a divise b^2, b divise c^2 et c divise a^2. Montrer que abc divise $a^7 + b^7 + c^7$.

Si tu aimes ce genre de problèmes, tu en trouveras tous les mois sur www.imosuisse.ch !