Cours Euler: Corrigé 24

le 8 mars 2023

Exercice 1

Pour chacune des affirmations de l'exercice, nous allons déterminer lesquelles sont vraies. Pour cet exercice, nous supposons que Edgard est un élève qui a 10 ans.

1) **Faux**. En effet, considérons les affirmations $R =$ « Edgard a 9 ans » et $S =$ « Edgard va à l'école ». Alors l'affirmation $R \Rightarrow S$ est vraie. Par contre, l'affirmation (non R) $\Rightarrow$ (non S) est « Marc n'a pas 9 ans, donc Marc ne va pas à l'école » qui est fausse.
2) **Vrai**. Il suffit de regarder la table de $(R \Rightarrow S)$ trouvée dans l'exercice 1 en remplaçant A par R et B par S.
3) **Faux**. Reprenons le contre-exemple utilisé dans 1, c'est-à-dire $R =$ « Edgard a 9 ans » et $S =$ « Edgard va à l'école ». Dans ce cas $R \Rightarrow S$ est vraie et R est fausse, comme on a fixé au début de l'exercice que Edgard est un élève de 10 ans. Mais S est vraie.
4) **Faux**. Posons $R =$« Edgard va à l'école » et $S =$« Edgard a 9 ans ». Alors R est vraie, l'implication $R \Rightarrow S$ est fausse. Mais S est fausse.
5) **Faux**. Soit R l'affirmation « Edgard a 9 ans » et S l'affirmation « Edgard ne va pas à l'école ». Alors, comme R est fausse, l'implication $R \Rightarrow S$ est vraie. Mais S est fausse.
6) **Vrai**. En effet, (R ou S) est vraie si et seulement si, soit R est vraie, soit S est vraie, soit R et S sont toutes deux vraies. Alors si R est vraie, (R ou S) est aussi vraie.
7) **Faux**. Prenons $R =$« J'ai un chien » et $S =$« J'ai un chat », et supposons que j'ai un chat mais je n'ai pas de chiens. Alors (R ou S) est vraie, mais R ne l'est pas.
8) **Vrai**. En effet, (R et S) est vraie si et seulement si R et S sont toutes deux vraies. Donc si (R et S) est vraie, en particulier R est vraie.
9) **Faux**. Si $(R \Rightarrow S) \iff (S \Rightarrow R)$ alors les tables logiques de $(R \Rightarrow S)$ et $(S \Rightarrow R)$ sont les mêmes. Mais elles sont

R\S	**V**	**F**
V	V	F
F	V	V

R\S	**V**	**F**
V	V	V
F	F	V

qui sont différentes. Comme contre-exemple, on peut utiliser le même exemple qu'en 1).

10) **Vrai**. Supposons que $((R \Rightarrow S)$ et $(S \Rightarrow T))$ est vraie. Alors $(R \Rightarrow S)$ est vraie et $(S \Rightarrow T)$ est vraie. Nous devons montrer que $R \Rightarrow T$, c'est-à-dire, si R est vraie, alors T est vraie. Supposons donc R vraie et montrons que T est vraie. Comme $(R \Rightarrow S)$ est vraie et R est vraie, S est vraie. Comme $(S \Rightarrow T)$ est vraie et S est vraie, T est vraie.

Remarquons que pour 6), 8), 10)il n'y a rien à vérifier dans le cas où la prémisse est fausse.

Exercice 2

Tables de vérité. (a) Nous remplissons la table colonne après colonne. La troisième est la négation de la première et la quatrième est la négation de la deuxième. Pour la colonne de $A \cap B$ on applique la définition de la conjonction : elle n'est vraie que si A et B sont vraies toutes les deux. La colonne suivante en est la négation.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \cap B$	$\neg(A \cap B)$	$\neg A \cup \neg B$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

La dernière colonne est remplie en appliquant la définition de disjonction. Cette affirmation $\neg A \cup \neg B$ est vraie si $\neg A$ ou $\neg B$ est vraie. On inscrit donc V à chaque fois qu'il apparaît un V dans la colonne de $\neg A$ ou $\neg B$.
(b) On procède comme dans (a) et on constate que les colonnes de D et E sont les mêmes.

A	B	C	$B \cup C$	D	$A \cap B$	$A \cap C$	E
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Exercice 3

(a) J'aime tous les légumes.
(b) Il y a un chat qui n'est pas noir.
(c) Tous les perroquets parlent.
(d) Il existe un perroquet qui parle.
(e) Les perroquets ne parlent jamais.
(f) Il existe un magasin ouvert tous les jours de la semaine.
(g) Tous les jours de la semaine, il y a un magasin ouvert.

Exercice 4

Pour tout - Il existe. 1) Choisissons comme phrase A l'égalité $n = m + 1$.
Alors l'affirmation « Pour tout m, il existe n tel que A » est vraie ; il suffit de poser $n = m + 1$. Par contre, « Il existe n tel que pour tout m, A » est fausse puisque pour n fixé, il existe au plus un nombre naturel m tel que A soit satisfaite.
2) Supposons que « Il existe n tel que pour tout m, A », et notons cette valeur de n par N. Alors « Pour tout m, il existe n tel que A » car il suffit de choisir $n = N$.

Exercice 5

Récurrence I. On cherche à calculer la somme des puissances de 2, c'est-à-dire

$$p(n) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n$$

On calcule $p(0) = 2^0 = 1$, puis $p(1) = 3$, $p(2) = 7$ et $p(3) = 15$. On commence à soupçonner que $p(n) = 2^{n+1} - 1$. Démontrons-le. La formule est correcte pour $n \leq 3$. Supposons donc qu'elle est vraie pour n et démontrons alors qu'elle est aussi vraie pour $n + 1$. Autrement dit nous devons montrer

$$p(n) = 2^{n+1} - 1 \ \Rightarrow\ p(n+1) = 2^{n+2} - 1$$

Calculons $p(n+1) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = p(n) + 2^{n+1}$. La formule étant vraie pour $p(n)$, nous en déduisons que

$$p(n+1) = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 6

Récurrence II. On construit une pyramide avec des blocs de pierre cubiques d'un mètre de côté en commençant avec une base carrée de n mètres de côté. On construit ensuite le deuxième étage de sorte à obtenir des marches d'un demi-mètre de profondeur : le deuxième étage mesure donc $(n-1)$ mètres sur $(n-1)$. On continue ainsi de suite jusqu'au sommet constitué d'un unique bloc de pierre. On appelle $f(n)$ le nombre de cubes qu'il faut pour construire la pyramide.
On calcule $f(1) = 1$, $f(2) = 4 + 1 = 5$ et $f(3) = 9 + 4 + 1 = 14$. Ces valeurs calculées coïncident avec $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour $1 \leq n \leq 3$. Nous sommes donc prêts à démontrer par récurrence que $f(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Nous devons montrer que

$$f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \Rightarrow \quad f(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

La pyramide de base carrée $(n+1) \times (n+1)$ s'obtient à partir de celle de base $n \times n$ en ajoutant un étage de $(n+1)^2$ blocs de pierre. Ainsi, puisque la formule est vraie pour n

$$f(n+1) = f(n) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

On met au même dénominateur :

$$f(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

et on continue le calcul :

$$f(n+1) = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

Heureusement, nous savons ce que nous devons démontrer. Il n'est pas nécessaire de savoir factoriser le polynôme $2n^2 + 7n + 6$, il suffit de calculer

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 4n + 3n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$$

En conclusion, l'hypothèse de récurrence $f(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ implique que le nombre de cubes $f(n+1)$ de pierre qu'il faut pour construire une pyramide d'un étage de plus vaut $\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
La démonstration est terminée.

Exercice 7

Récurrence III. Lorsque $n = 3$, on calcule $3^{2\cdot 3} - 2^{3-3} = 3^6 - 1 = 729 - 1 = 728 = 7 \cdot 104$. La récurrence est initialisée, nous pouvons démontrer le pas de récurrence.
Supposons donc que $3^{2n} - 2^{n-3}$ est un multiple de 7. Nous devons montrer que $3^{2(n+1)} - 2^{(n+1)-3} = 3^{2n+2} - 2^{n-2}$ est un multiple de 7. Calculons

$$3^{2n+2} - 2^{n-2} = 9 \cdot 3^{2n} - 2^{n-2} = (7+2)3^{2n} - 2^{n-2} = 7 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 3^{2n} - 2^{n-2}$$

Ce nombre est un multiple de 7 si et seulement si $2 \cdot 3^{2n} - 2^{n-2}$ est un multiple de 7. Or

$$2 \cdot 3^{2n} - 2^{n-2} = 2 \cdot (3^{2n} - 2^{n-3})$$

qui est un multiple de 7 par hypothèse d'induction. Ceci conclut la preuve.

Exercice 8

Vrai ou faux ?

1. La relation réciproque de $\leq : \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N}$ est la relation $> : \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N}$. C'est faux. Puisque $1 \leq 1$ on a aussi $1 \leq^{-1} 1$. La relation réciproque est donc $\geq$.
2. Soit $\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} | n \leq m\}$ la représentation ensembliste d'une relation
$$R : \mathbb{N} \rightsquigarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$
Alors l'ensemble de définition de R est vide.
Cette relation est constituée de toutes les paires (n, m) avec $0 \leq n \leq m \leq 5$. Les éléments $n \geq 6$ ne sont en relation avec personne, ils ne font donc pas partie de l'ensemble de définition puisqu'une fonction doit associer à chaque élèment de l'ensemble de définition une image dans l'ensemble d'arrivée. Les éléments $0, 1, 2, 3, 4$ sont quant à eux en relation avec plusieurs éléments, il faut aussi les enlever. Ainsi ED $= \{5\}$.
3. Pour n'importe quels ensembles X et Y, il existe une fonction de X vers Y. C'est faux si Y est l'ensemble vide. Sinon, dès que Y est non vide, on peut choisir un élément $y \in Y$ et construire la fonction constante $c_y : X \to Y$.
4. Il y a 6 fonctions injectives de $\{\diamondsuit, \heartsuit\}$ vers $\{0, 1, 2\}$. Une fonction correspond à un choix d'une image du symbole "diamant" et une image pour le symbole "coeur". On peut choisir ces images parmi les nombres 0, 1 et 2. Pour que la fonction soit injective les images des deux symboles doivent être différentes. Combien de choix pouvons-nous faire ? Il y a 3 choix pour le "diamant", mais plus que 2 choix pour le "coeur" une fois que l'image du diamant est choisie. Il y a donc six fonctions injectives, c'est vrai.
5. Le degré de l'équation
$$x^4 - 3x + 2 = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$$
est 1. Cette équation est équivalente à $x^4 - 3x + 2 = x^4 - 4$ autrement dit $-3x + 6$. Elle est de degré 1, c'est vrai. D'ailleurs la solution est $x = 2$.

Exercice 9

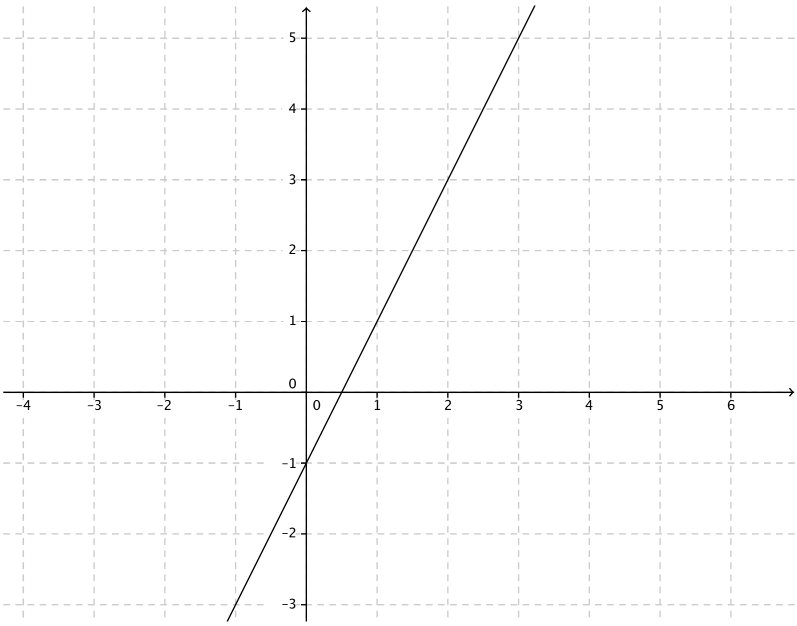
Deux fonctions. On considère la fonction réelle $f(x) = 2x - 1$ et la fonction $g(x) = \sqrt{x}$.

(1) L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$. On écrit $ED(f) = \mathbb{R}$. L'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}_+$ car la racine carrée d'un nombre n'est définie que si ce nombre est positif ou nul. Le graphe de g est une demi parabole "couchée".

(3) La fonction f est injective et surjective car c'est une fonction affine non constante. Graphiquement on voit cela en constatant que toute droite horizontale coupe le graphe exactement une fois. Algébriquement l'injectivité traduit le fait que deux nombres distincts x et x' ont des images différentes : $2x - 1 \neq 2x' - 1$. La surjectivité signifie que pour chaque nombre réel y il existe un nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$ (on dit que y est l'image de x par f). En effet on choisit $x = \dfrac{y+1}{2}$ puisque

$$f(\frac{y+1}{2}) = 2 \cdot \frac{x+1}{2} - 1 = x + 1 - 1 = y$$

(2)



(4) La composition $g \circ f$ est la fonction

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = \sqrt{2x-1}$$

L'ensemble de définition de cette fonction est $[1/2, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1/2\}$. En effet pour que cette expression soit bien définie il faut que $2x - 1 \geq 0$. Autrement dit $x \geq 1/2$.

(5) La composition $f \circ g$ est la fonction qui envoie x sur $2\sqrt{x} - 1$. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}_+$.

Exercice 10

Équations. Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. Pour résoudre l'équation affine $mx - x + m + 1 = 0$, nous utilisons la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition pour mettre x en évidence :

$$(m-1)x + m + 1 = 0$$

On soustrait $m + 1$ des deux côtés pour obtenir

$$(m-1)x = -(m+1)$$

C'est maintenant que la discussion commence puisque nous devrions diviser par $m-1$ pour trouver x. Cela n'est pas possible lorsque $m = 1$ et il faut donc traiter ce cas de manière séparée. Lorsque $m = 1$ l'équation se réduit à $0 = -2$, qui n'a aucune solution, ici $S = \emptyset$.

Supposons donc que $m \neq 1$. Alors on peut diviser par $m - 1$ et on trouve $x = -\dfrac{m+1}{m-1}$. Ici $S = \{-\dfrac{m+1}{m-1}\}$.

Exercice 11

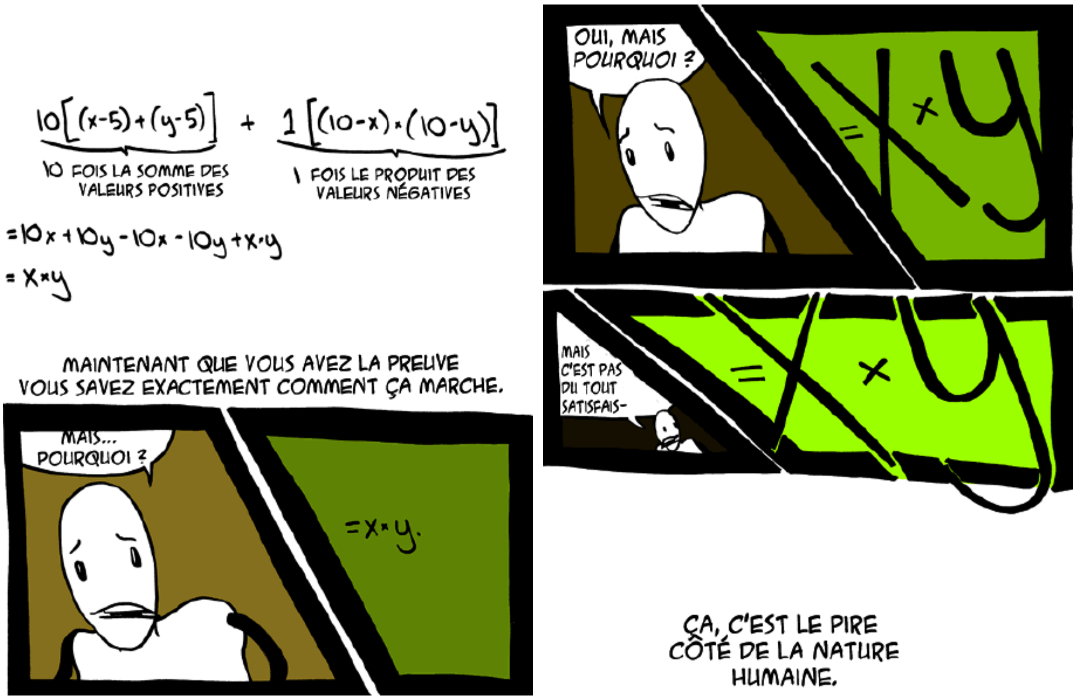
Un problème. Le magicien Moebius pense à un nombre. Il lui ajoute 20 et multiplie le résultat par 2. Curieusement il trouve 10 fois le nombre de départ. Appelons x ce nombre. Alors l'information donnée se traduit en une équation

$$2(x + 20) = 10x$$

On développe : $2x + 40 = 10x$. On soustrait $2x$ de chaque côté : $40 = 8x$. On divise par 8 et on obtient que le nombre $x = 5$.

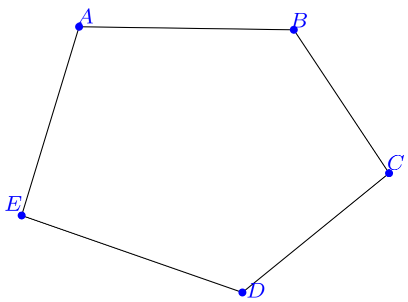
Exercice 12

La main magique polonaise. Tiré du webcomic “les céréales du dimanche matin”, http ://cereales.lapin.org/ind
ber=1766



Exercice 13

On se représente ce problème par un *graphe* : les points (appelés sommets du graphe) représentent les personnes et les traits (appelés arêtes) indiquent que les personnes reliées par ce trait se connaissent. Ainsi une groupe de trois personnes qui se connaissent toutes entre elles est représenté par un triangle. S'il y a cinq personnes le graphe suivant montre une situation où il n'y a aucun sous-groupe de trois personnes qui se connaissent (puisque le graphe ne contient aucun triangle) :



mais il n'y a pas non plus de sous-groupe de trois personnes qui ne se connaissent pas puisque chaque personne connaît exactement deux personnes. La solution au problème est donc au moins 6 et on peut résoudre le problème par sous-cas pour trouver que $n = 6$...