

Cours Euler: Corrigé 25

le 22 mars 2023

Exercice 1

Classification des isométries du plan, rappel. Considérons trois points non alignés A, B, C et leurs images A', B', C' par une isométrie f .

(i) Lorsque $A = A'$, nous décidons de choisir $a = AB$, la seule droite passant par A et B . Ainsi $S_a(A) = A = A'$ et $S_a(B) = B$. En général, lorsque $A \neq A'$, nous choisissons la médiatrice du segment $[AA']$. Il s'agit par définition de l'axe de symétrie du segment et la symétrie axiale d'axe a envoie A sur A' (et vice-versa).

(ii) Lorsque $B_1 = B'$ nous choisissons la droite $b = A'B'$. De cette façon A' et $B = B'$ sont fixés par la symétrie axiale S_b . Lorsque B' et B_1 sont deux points distincts, nous choisissons pour b la médiatrice du segment $[B_1B']$. De cette façon $S_b(B_1) = B'$. D'autre part le point A' est fixé par S_b car il appartient à b . Pour prouver cela nous utilisons la caractérisation de la médiatrice b comme lieu géométrique des points équidistants de B_1 et B' . Puisque $S_a(A) = A'$ et $S_a(B) = B_1$, nous déduisons du fait qu'e la symétrie axiale S_a et f sont des isométries que

$$\overline{B_1A'} = \overline{S_a(B)S_a(A)} = \overline{BA} = \overline{f(B)f(A)} = \overline{B'A'}$$

Le point A' appartient donc à b .

(iii) Lorsque $C_2 = S_b(C_1)$ et C' sont égaux, il n'existe pas de symétrie axiale qui transforme C en C' et fixe A' et B' , car cette symétrie fixerait trois points non alignés, ce qui est impossible. Dans ce cas l'isométrie $S_b \circ S_a$ transforme A en A' , B en B' et C en C' .

Sinon, on choisit pour c – comme toujours – la médiatrice de $[C_2C']$. Le même raisonnement que ci-dessus concernant les longueurs des segments montre que A' et B' appartiennent à c . Ainsi S_c fixe A' et B' et transforme C_2 en C' . Le plus simple sera donc de choisir directement $c = A'B'$.

(iv) Lorsque c existe, on calcule l'image des points A, B et C par la composition $S_c \circ S_b \circ S_a$:

1. $(S_c \circ S_b \circ S_a)(A) = (S_c \circ S_b)(S_a(A)) = (S_c \circ S_b)(A') = S_c(S_b(A')) = S_c(A') = A'$;
2. $(S_c \circ S_b \circ S_a)(B) = (S_c \circ S_b)(S_a(B)) = (S_c \circ S_b)(B_1) = S_c(S_b(B_1)) = S_c(B') = B'$;
3. $(S_c \circ S_b \circ S_a)(C) = (S_c \circ S_b)(S_a(C)) = (S_c \circ S_b)(C_1) = S_c(S_b(C_1)) = S_c(C_2) = C'$;

(v) On conclut des calculs ci-dessus que f et $S_c \circ S_b \circ S_a$ ont le même effet sur les points A, B, C . La composition $f \circ (S_c \circ S_b \circ S_a)^{-1}$ est donc l'identité car c'est la seule isométrie du plan qui fixe trois points non alignés. Par conséquent

$$f = f \circ (S_c \circ S_b \circ S_a)^{-1} \circ (S_c \circ S_b \circ S_a) = Id \circ (S_c \circ S_b \circ S_a) = S_c \circ S_b \circ S_a$$

L'isométrie f est une composée de trois symétries axiales. Ceci clôt le cas où c existe. Sinon $f = S_b \circ S_a$ est une composition de deux symétries axiales.

On remarque que le cas où f est l'identité (composée de zéro symétries axiales) est donné par $f = S_a \circ S_a$. C'est aussi la composition de deux symétries. Le cas où f est une symétrie S_a est donné par $f = S_a \circ S_a \circ S_a$.

Exercice 2

1) Soient R et R' deux rotations de centre O et d'angle orientés respectivement α et β . Alors la composé $R' \circ R$ est une rotation de centre O . Soit A un point du plan distinct de O . Si on note $R(A) = A'$ et $R' \circ R(A) = R'(A') = A''$ alors l'angle de la rotation $R' \circ R$ est donné par l'angle $\widehat{AOA''} = \widehat{AOA'} + \widehat{A'OA''} = \alpha + \beta$.

On peut également le voir au moyen des axes de symétrie qui composent les rotations, sachant que l'angle orienté d'une rotation vaut deux fois l'angle orienté déterminé par ses deux axes (où l'orientation est donnée par l'ordre dans lequel on fait les réflexions). On a vu dans la série précédente que pour obtenir les axes de la rotation composée, on peut faire coïncider le deuxième axe de R avec le premier de R' , qui s'annulent alors. L'angle orienté entre les deux axes restant est la somme des angles orientés entre les axes de R et de R' . Une preuve complète de ce fait est cependant ardue et nous la passons ici. Notons qu'on doit prendre des sommes "à 360 degrés près". Par exemple, la somme de rotations d'angles 120° et 300° est une rotation d'angle 60° (et non pas 420°).

2) Soit O le centre de rotation de R et O' le centre de rotation de R' . Notons α l'angle de la rotation R et β l'angle de la rotation R' . Différencions deux cas :

- $\alpha = -\beta$. Dans ce cas, $R \circ R'$ est une translation.

En effet, puisque R est une rotation, alors R est la composée de deux réflexions se coupant en O (c'est un théorème vu au cours). Soit d la droite passant par O et O' , et S_d la symétrie d'axe d . Alors il y a une et unique droite c telle que $R = S_c \circ S_d$. A partir de la droite d donnée, on a donc construit un des axes de symétrie composant R . Faisons de même pour R' : Il y a une unique droite e tel que la réflexion S_e dont l'axe est cette droite vérifie $R' = S_d \circ S_e$. Puisque $\alpha = -\beta$, alors l'axe de S_e est parallèle à l'axe de S_c .

Ainsi :

$$R \circ R' = S_c \circ S_d \circ S_d \circ S_e = S_c \circ S_e$$

Comme les axes de S_c et S_e sont parallèles, alors $R \circ R'$ est une translation.

- $\alpha \neq -\beta$. Dans ce cas, $R \circ R'$ est une rotation.

Reprenons comme avant la droite d , et les axes de S_c et S_e . Comme $\alpha \neq -\beta$, alors, ces deux derniers axes se coupent en un point C .

Ainsi

$$R \circ R' = S_c \circ S_d \circ S_d \circ S_e = S_c \circ S_e$$

Donc $R \circ R'$ est une rotation de centre C .

Exercice 3

149. Pour trouver le centre, on trace la médiatrice d du segment $[MM']$, et la médiatrice d' du segment $[NN']$. Le centre O est alors le point d'intersection de ces deux médiatrices. L'angle de rotation est l'angle $\widehat{MOM'}$.

Exercice 4



Corrigé

159.

Le centre de rotation O se trouve sur la médiatrice de chaque segment déterminé par un point et son image. Il se situe donc sur la médiatrice m du segment AA' .

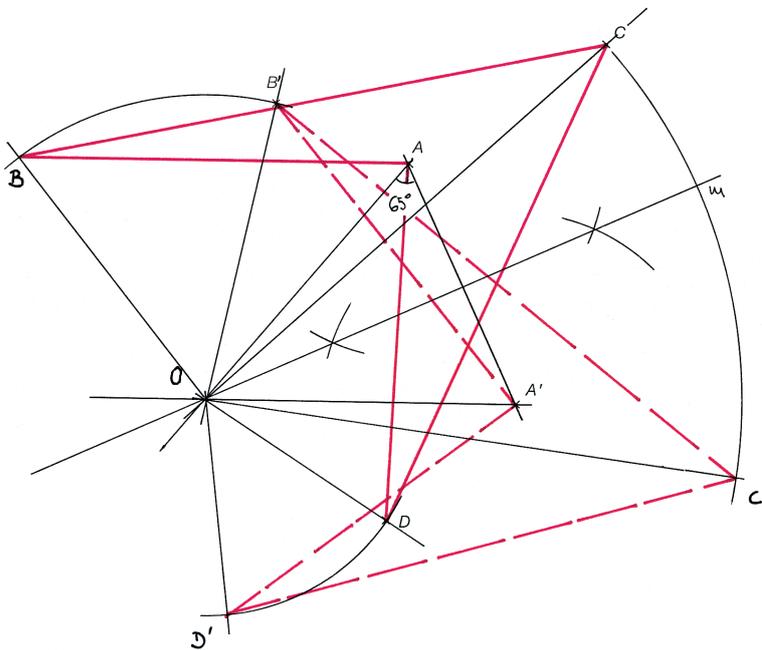
L'angle $\widehat{AOA'} = 50^\circ$.

Comme $OA = OA'$, puisque O appartient à la médiatrice de AA' , le triangle AOA' est isocèle. Par conséquent les angles $\widehat{AOA'}$ et $\widehat{A'OA}$ sont isométriques et mesurent :

$$\widehat{AOA'} = \widehat{A'OA} = \frac{180 - 50}{2} = 65^\circ.$$

Il s'agit alors de construire un angle de côté $A'A$, de sommet A qui mesure 65° , puis de chercher l'intersection de son second côté avec la médiatrice m , pour déterminer l'emplacement du centre de rotation O .

Les figures $ABCD$ et $A'B'C'D'$ peuvent alors être complétées, en s'appuyant sur les propriétés des rotations.



Exercice 5

On peut voir que le triangle $A''B''C''$ est obtenu de ABC par une translation (composition de deux symétries axiales d'axes parallèles).

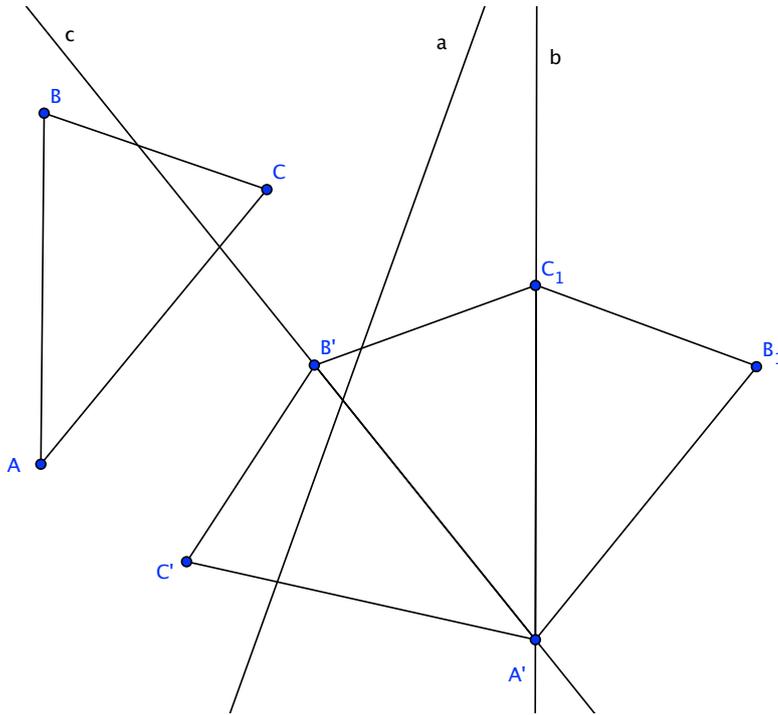
Considérons la droite AA'' . Il suffit de trouver deux symétries axiales dont les axes sont perpendiculaires à cette droite et qui envoient A sur A'' . On peut choisir le premier axe d arbitrairement, sous la contrainte qu'il doit être perpendiculaire à la droite AA'' . L'image de A par cette symétrie est A' . Maintenant, le second axe d' doit être la médiatrice du segment $A'A''$.

Exercice 6

En traçant les médiatrices des segments AA' , BB' et CC' , on constate qu'elles sont toutes concourantes en un point O . Brigitte a donc fait une rotation de centre O pour obtenir $A'B'C'$ à partir de ABC . En fait, Claude-Eric a obtenu le triangle $A'B'C'$ par la composition d'une translation et d'une rotation non nulle, et cette transformation est une rotation non nulle (c'est un théorème).

Exercice 7

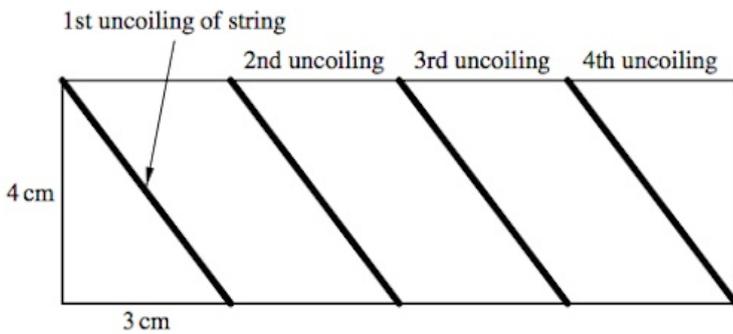
Composition de symétries.



L'isométrie qui transforme le triangle ABC en $A'B'C'$ n'est pas une rotation puisqu'il s'agit d'une composition de trois symétries axiales. Une rotation quant à elle est soit l'identité, soit la composition de deux symétries axiales (dont les axes se coupent).

Exercice 8

La manière la plus simple de résoudre le problème est de couper le cylindre horizontalement pour le mettre à plat. On obtient alors un rectangle de 12 cm de long et de 4 cm de large (la circonférence du cylindre mesure 4cm). La ficelle parcourt ce rectangle comme sur l'illustration suivante :



Il suffit donc d'appliquer le Théorème de Pythagore. Chacun des quatre segments de ficelle mesure exactement

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

La ficelle mesure donc $4 \cdot 5 = 20$ cm.