Cours Euler, Première année

Partie IV: Retour à la géométrie plane

Jérôme Scherer

Introduction

Nous revenons à la géométrie plane pour cette fin d'année scolaire. Pour rafraîchir nos souvenirs sur les objets et les méthodes de ce sujet, nous revoyons rapidement tous les axiomes sur lesquels se construit cette théorie, en particulier l'axiome de symétrie sur lequel se base notre étude des isométries. Nous avons vu le Théorème de classification, mais ne connaissons jusqu'ici que les symétries axiales et les rotations. Pour conclure l'étude et la compréhension des isométries du plan, il nous manque encore les translations et les renversements sans points fixes.

Notre connaissances des isométries et comment elles agissent sur les points du plan nous a permis de comprendre qu'une isométrie est complètement déterminée par ce qu'elle fait sur trois points non alignés. C'est donc tout naturellement que nous continuons dans le chapitre suivant avec l'étude des triangles et les trois célèbres cas d'isométrie des triangles. Notre étude des triangles se terminera avec la découverte de quatre points remarquables : le centre du cercle inscrit, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre.

Nous serons dès lors à même de comprendre certains phénomènes plus complexes, je pense au cercle de Thalès, au Théorème de l'angle inscrit et à la construction des tangentes à un cercle. Ces exemples sont tous liés d'une manière ou une autre au double arc capable, lieu géométrique des points d'oû l'on voit un segment donnée sous un angle donné. Nous terminerons finalement ce chapitre avec les Théorèmes de Pythagore et de Thalès, ce dernier reposant sur la notion de similitude qui sera étudiée plus profondément l'année prochaine.

Chapitre 1

Les isométries du plan

Dans ce premier chapitre nous commençons par rappeler les axiomes de la géométrie euclidienne plane sur lesquels nous nous basons pour comprendre à la fois les constructions géométriques usuelles et aussi les transformations du plan qui respectent la *structure* disponible (en particulier la distance). C'est une idée relativement moderne d'étudier la géométrie en se concentrant sur le *groupe* de ses isométries. Notre seul objet d'étude est la géométrie euclidienne, mais nous avons mentionné la géométrie hyperbolique, dans laquelle l'axiome des parallèles n'est pas vérifié. Le groupe des isométries de cette autre géométrie est différent de celui que nous étudions et cette différence permet de comprendre ses particularités.

Après des rappels nous découvrons de nouvelles isométries du plan, à savoir les translations et les renversements sans points fixes.

1. Rappel : les axiomes de la géométrie plane

Nous travaillons avec des points et des droites (qui sont des ensembles de points). Dans cette section nous rappelons les quatre premiers axiomes qui mettent en place les propriétés que doivent vérifier les points du plan et les figures géométriques élémentaires que sont droites, demi-droites et segments.

Axiome 1.1. **Axiomes de connexion.**
(C1) Par deux points distincts passe une et une seule droite.
(C2) Toute droite contient au moins deux points.
(C3) Il existe trois points non colinéaires.

Certains sous-ensembles d'une droite sont appelés demi-droites. Les axiomes de séparation nous apprennent que tout point d'une droite partage cette droite en deux demi-droites.

Axiome 1.2. **(S1) Axiome de la demi-droite.** Tout point P d'une droite d détermine deux parties d_1 et d_2 de d, appelées *demi-droites*, qui ont les propriétés suivantes :

(a) $d_1 \cup d_2 = d$

(b) $d_1 \cap d_2 = P$

(c) Si A et B appartiennent à la même demi-droite, disons d_1, le segment $[AB]$ est inclus dans d_1.

(d) Quand deux points C et D appartiennent l'un à d_1, l'autre à d_2, alors le segment $[CD]$ contient le point P.

On note parfois Ad une demi-droite supportée par la droite d et d'extrémité A. Cette notation ne détermine pas la demi-droite dont on parle, puisqu'il existe deux telles demi-droites, et on ne fera cet abus de notation que lorsqu'il ne porte pas à confusion.

De même toute droite partage le plan en deux demi-plans. A partir d'ici nous travaillons vraiment dans un plan (pas dans l'espace) et étudions donc la géométrie plane !

Axiome 1.3. **(S2) Axiome du demi-plan.** Toute droite d du plan π détermine dans celui-ci deux parties distinctes π_1 et π_2, appelées *demi-plans*, telles que :

(a) $\pi_1 \cup \pi_2 = \pi$

(b) $\pi_1 \cap \pi_2 = d$

(c) Si A et B appartiennent au même demi-plan, disons π_1, le segment $[AB]$ est inclus dans π_1

(d) Quand deux points C et D appartiennent l'un à π_1, l'autre à π_2, alors il existe sur la droite d au moins un point P du segment $[CD]$.

Notre règle qui nous permet de tracer droites et segments est *graduée*. Elle nous permet donc de mesurer des distances. Les axiomes qui suivent nous permettent aussi de mesurer les angles (en degrés, ou en radians), mais nous n'y reviendrons pas.

AXIOME 1.4. **Axiomes de la distance.** Soient A, B, C des points du plan.

(D1) $d(A, B) = d(B, A)$

(D2) $d(A, B) = 0 \iff A = B$

(D3) (Inégalité triangulaire) $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$.

(D4) $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C) \iff B$ appartient au segment $[AC]$.

(D5) (*Report d'une distance sur une demi-droite*) Soient Cd une demi-droite et $[AB]$ un segment. Il existe sur Cd un unique point D tel que $d(C, D) = d(A, B)$.

(D6) (*Construction du triangle à partir de trois segments*) Soient trois segments $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$ tels que $|\overline{EF} - \overline{CD}| < \overline{AB} < \overline{EF} + \overline{CD}$. Il existe alors exactement deux points P et P' tels que

$$\overline{AP} = \overline{AP'} = \overline{CD} \quad \text{et} \quad \overline{BP} = \overline{BP'} = \overline{EF}.$$

(D7) Pour tout réel strictement positif r, il existe un segment de longueur r.

2. Les isométries

Afin de pouvoir comparer deux figures géométriques nous les déplaçons dans le plan, sans modifier les distances, pour les amener l'une sur l'autre. Ces déplacements sont des transformations géométriques appelées isométries.

Nous rappelons dans cette deuxième section les deux derniers axiomes de la géométrie euclidienne et énonçons le Théorème de classification des isométries que nous avons démontré dans le deuxième fascicule.

DÉFINITION 2.1. Une *isométrie* est une transformation géométrique du plan qui préserve les distances, c'est-à-dire une transformation

$$f : \Pi \to \Pi$$

telle que $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$ pour tous $A, B \in \Pi$.

Les isométries de base avec lesquelles nous construisons toutes les autres sont les symétries axiales. Leur existence est notre avant-dernière règle du jeu.

AXIOME 2.2 (**Axiome de symétrie**). Soit d une droite quelconque. Il existe exactement deux isométries qui laissent fixes tous les points de d. Ce sont :

(1) L'identité.

(2) Une isométrie qui transforme tout point P situé sur un demi-plan ouvert déterminé par d en un point P' situé sur l'autre demi-plan ouvert déterminé par d.

Cette isométrie est appelée *symétrie axiale suivant* d ou *symétrie d'axe* d ou encore *réflexion par rapport à* d. On la note parfois S_d.

Une situation élémentaire, mais très importante, est la suivante. On se donne deux points distincts A et B. Il existe un axe de symétrie m de cette figure, appelé *médiatrice* du segment $[AB]$. La symétrie axiale S_m a la propriété de transformer A en B et B en A.

Jusqu'ici la géométrie que nous avons étudié est plane. Notre dernier axiome nous emmène dans le monde de la géométrie euclidienne.

AXIOME 2.3. **des parallèles. (P)** Par tout point P hors d'une droite d passe au plus une parallèle.

Puisqu'il est toujours possible de construire au moins une parallèle à d passant par P, cet axiome implique en fait qu'il existe exactement une parallèle.

Toute isométrie est entièrement déterminée par son action sur un triangle. Ceci signifie que si nous comprenons comment une isométrie donnée transforme trois points non alignés, alors nous connaissons tout de cette isométrie et savons en particulier construire l'image d'un point arbitraire. Nous reviendrons dans la série d'exercices sur le résultat suivant :

THÉORÈME 2.4. **de classification des isométries du plan.** *Toute isométrie peut-être obtenue par la composée d'au plus trois réflexions (0, 1, 2 ou 3).*

DÉFINITION 2.5. On dit qu'une isométrie est la *composée de zéro réflexion* si elle est égale à l'identité. Elle est la *composée d'une réflexion* si c'est une réflexion.

3. Les rotations

Puisque les cas de zéro et une réflexion sont facile à comprendre, une bonne compréhension du Théorème de classification passe par l'étude de toutes les isométries qui sont composées de deux ou trois symétries axiales. Le premier type d'isométrie que nous avons rencontré est le suivant.

DÉFINITION 3.1. Une *rotation* est une isométrie qui, soit est l'identité (la *rotation triviale* ou *nulle*), soit fixe un unique point O du plan (*rotation non triviale*). Ce point O s'appelle le *centre* de la rotation. N'importe quel point peut être considéré comme le centre de la rotation nulle.

En termes de nos "isométries de base", les rotations sont composées de deux symétries axiales.

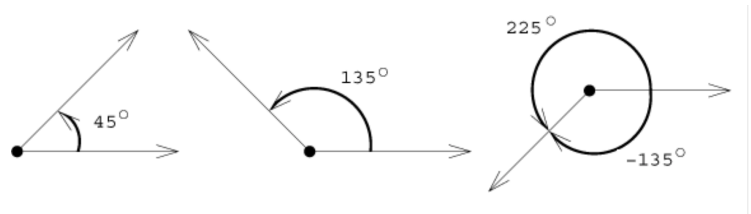
PROPOSITION 3.2. *Une isométrie est une rotation si et seulement si c'est la composée de deux réflexions d'axes ayant au moins un point O commun.*

Dans la pratique, et si le centre de rotation est connu, on construit une rotation avec un compas (plutôt qu'en deux symétries axiales). On remarque d'abord que si l'on se donne A et B deux points équidistants d'un point O et distincts de O, alors il existe une unique rotation de centre O qui transforme A en B. Cette rotation est déterminée complètement par son centre O et l'angle *orienté* $\alpha = \widehat{AOB}$. L'orientation est positive lorsque l'angle est parcouru dans le sens trigonométrique et négatif lorsqu'il est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre. On note cette rotation $\mathcal{R}(O, \alpha)$.

Dans notre étude axiomatique de la géométrie plane, nous avons basé notre compréhension des transformations du plan sur l'existence des symétries axiales. Nous avons aussi démontré que toute isométrie du plan est soit l'identité, soit une symétrie axiale, soit encore la composition de deux ou trois symétries axiales. Les rotations par exemple fixent un point du plan et peuvent s'exprimer comme la composition de deux symétries axiales dont les axes se coupent. Notre but est maintenant de comprendre quelles sont les autres isométries.

4. Les translations

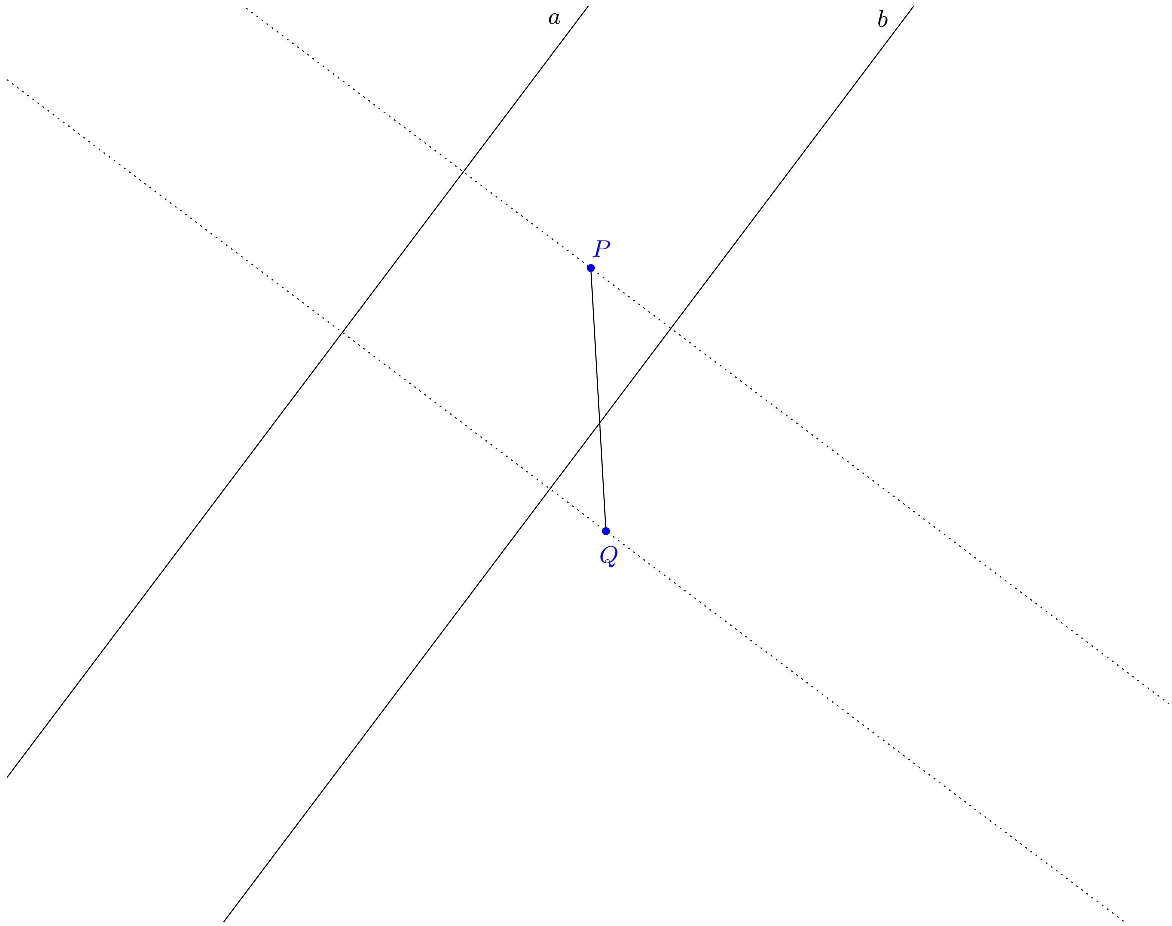
Pour définir les translations il faut nous souvenir que certaines isométries préservent l'orientation des angles (c'est le cas des rotations), d'autres, comme les symétries axiales, renversent l'orientation, c'est-à-dire qu'un angle qui est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre est transformé en un angle qui est parcouru dans le sens contraire, dit trigonométrique.



Définition 4.1. Une *translation* est une isométrie qui, soit est l'identité (appelée aussi *translation triviale* ou *nulle*), soit préserve l'orientation des angles et n'a aucun point fixe (translation non nulle).

La caractérisation suivante explique ce que sont les translations en terme de symétries axiales.

Proposition 4.2. *Une isométrie est une translation si et seulement si c'est la composée de deux réflexions d'axes confondus ou parallèles.*


a
b
P
Q

Nous apprenons ainsi que parmi les isométries qui préservent l'orientation, les rotations sont les composées de deux symétries axiales dont les axes se coupent et les translations sont celles dont les axes ne se coupent pas. Dans le premier cas il y a un point fixe, dans le second aucun. L'identité est un cas à part, on peut la considérer comme une rotation ou une translation !

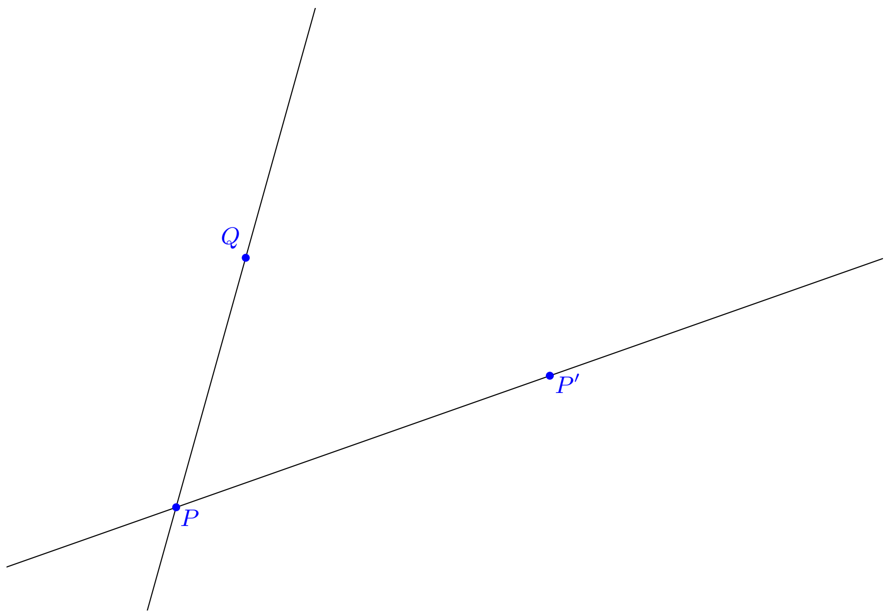
Proposition 4.3. *Une translation τ est uniquement déterminée par l'image $P' = \tau(P)$ d'un point P.*

Démonstration. Supposons que τ n'est pas l'identité. L'image d'un autre point Q se construit alors comme suit.

(1) Tracer la parallèle p à PQ par P'.

(2) Tracer la parallèle q à PP' passant par Q.

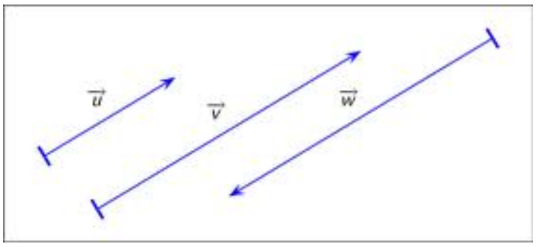
(3) Le point Q' est l'intersection de p et q.



□

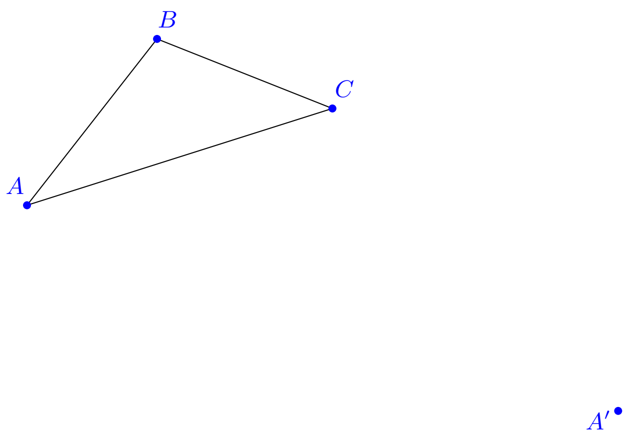
Définition 4.4. Soit τ une translation. La droite $P\tau(P)$ s'appelle la *direction* de la translation (comme n'importe quelle droite parallèle à PP'). La demi-droite $[P\tau(P)$ est le *sens* de la translation et la distance $\overline{P\tau(P)}$ son *amplitude*.

La donnée d'une direction, d'un sens et d'une amplitude s'appelle un *vecteur*, noté $\vec{v}$. Nous y reviendrons l'année prochaine ! Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même amplitude. On représente un vecteur par une flèche, supportée par l'une des droites qui donnent sa direction :



Remarque 4.5. L'un des deux axes de réflexion d'une translation peut être choisi arbitrairement parmi les droites perpendiculaires à la direction de la translation. Lorsque l'un des axes a été choisi l'autre est une droite parallèle qui se trouve à distance $x/2$ si x est l'amplitude de la translation.

Exemple 4.6. On donne un triangle ΔABC et l'image A' du point A par une translation τ. Construis les axes a et b tels que $\tau = S_b \circ S_a$ (simplifie-toi la tâche en choisissant bien le premier axe, par exemple la médiatrice du segment $[AA']$!). Construis l'image du triangle ΔABC par cette translation et dessine le vecteur qui détermine τ.



5. Les renversements sans points fixes

Nous connaissons presque toutes les isométries du plan. Il y a l'identité (aucune symétrie axiale), les symétries axiales (une), les rotations et les translations (deux). Il nous reste seulement à comprendre les compositions de trois symétries axiales.

DÉFINITION 5.1. Un *renversement sans point fixe* est une isométrie qui renverse l'orientation et qui n'a pas de point fixe.

PROPOSITION 5.2. *Si une isométrie est un renversement sans point fixe, alors elle est la composée de trois réflexions. Inversement, la composition de trois réflexions est soit une réflexion, soit un renversement sans point fixe. C'est une réflexion si et seulement si les trois axes ont un point en commun ou sont de même direction.*

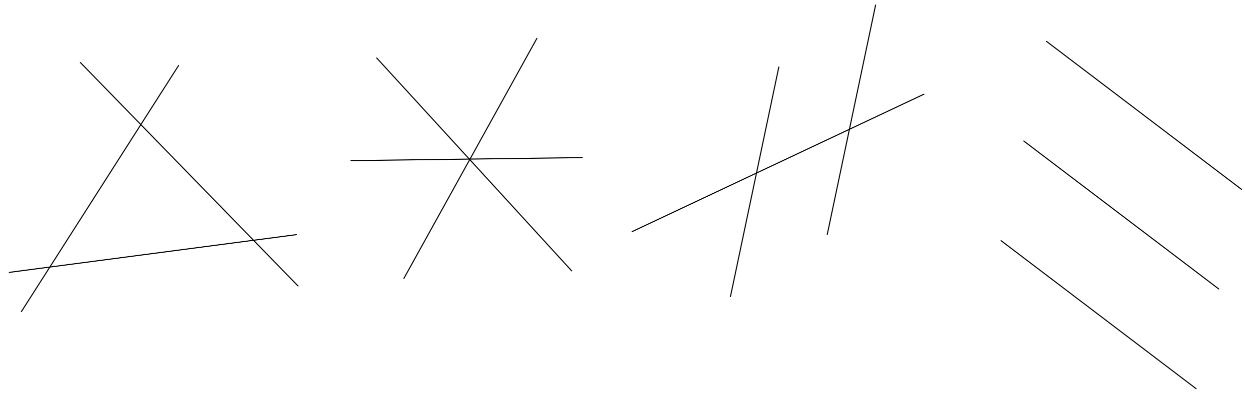
DÉMONSTRATION. Une isométrie qui renverse l'orientation doit être la composée d'un nombre impair de réflexions, soit une ou trois. Mais les réflexions fixent tous les points d'une droite. Donc les renversements sans point fixe nécessitent trois axes.

Dans la série, on va donner un critère nécessaire et suffisant pour que la composée de trois réflexions soit une réflexion. Dans les autres cas, ce doit être un renversement sans point fixe. En effet, supposons que l'on ait une composée de trois réflexions qui ne soit pas une réflexion (ce qui existe par le critère énoncé, prouvé dans la série). On sait déjà qu'elle inverse l'orientation. Si elle fixait trois points non alignés au moins, ce serait l'identité (qui préserve l'orientation, contradiction). Sinon, si elle fixait deux points distincts, ce serait une réflexion, d'où une contradiction. Si elle fixait un unique point, une rotation (qui préserve l'orientation, contradiction). Elle ne doit donc fixer aucun point. □

Nous connaissons donc toutes les isométries du plan ! On pourrait se donner 117 axes de symétrie et considérer la composition des 117 réflexions correspondantes, ce serait encore l'une des isométries que nous avons étudiée. Dans ce cas, puisque 117 est impair, il ne pourrait s'agir que d'une isométrie qui renverse l'orientation, c'est-à-dire soit une symétrie axiale, soit un renversement sans point fixe.

THÉORÈME 5.3. *Une isométrie du plan est soit l'identité, soit une symétrie, soit une rotation, soit une translation, soit un renversement sans point fixe.*

REMARQUE 5.4. La position relative de trois droites peut être l'une des positions suivantes : droites concourantes deux à deux, droites concourantes, deux droites parallèles coupées par une droite sécante, trois droites parallèles. On ne traite pas les cas plus simples dans lesquels deux des droites sont confondues.



Dans les cas 2 et 4 la composition des trois symétries axiales donne une symétrie axiale, dans les cas 1 et 3 on a un renversement sans point fixe.

Chapitre 2

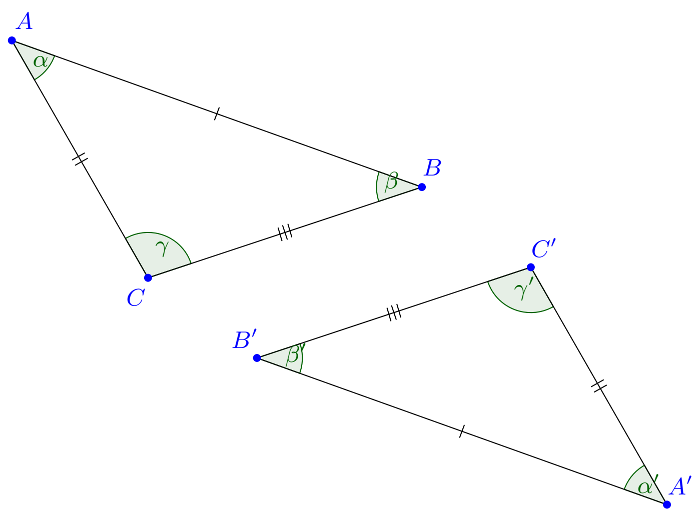
Géométrie du triangle

Dans ce chapitre nous présentons d'abord les trois cas d'isométrie des triangles. Il s'agit de trois critères nécessaires et suffisants basés sur les longueurs des côtés et les mesures des angles qui permettent de reconnaître deux triangles isométriques. En d'autres termes, quelques mesures simples (longueurs et angles) suffisent pour assurer l'existence d'une isométrie qui transforme un triangle donné en un autre triangle donné. L'important ne sera pas ici de savoir qui est cette isométrie en général.

Nous passons ensuite à la “botanique” des triangles, en les classant par “espèce”, c'est-à-dire en fonction de certaines propriétés particulières qui nous aident à les reconnaître.

1. Cas d'isométrie des triangles

Nous allons trouver des critères qui permettent de dire que deux triangles $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ sont isométriques, c'est-à-dire qu'il existe une isométrie qui transforme A en A', B en B' et C en C'.



Notons que lorsque $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ sont isométriques, alors il en est de même de leurs parties :

(1) Les côtés sont isométriques deux à deux.

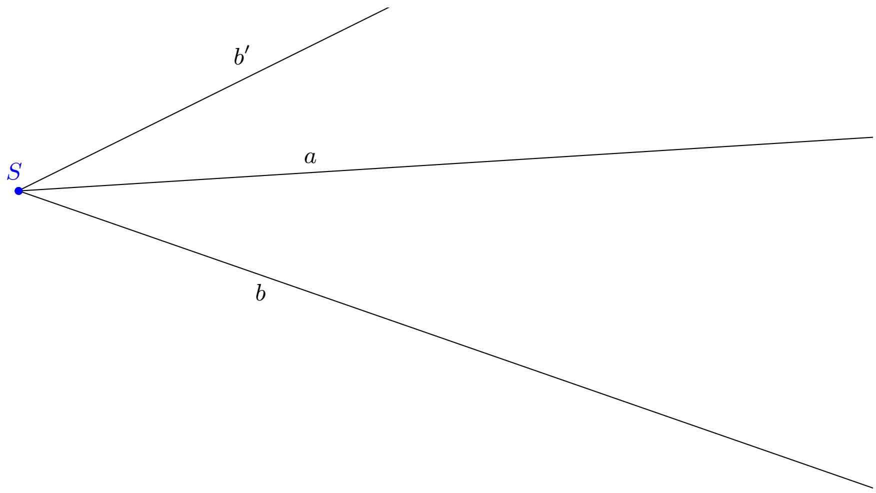
(2) Les angles sont isométriques deux à deux.

Remarque 1.1. Lorsqu'on parle d'angles isométriques, on ne les suppose pas orientés (sauf mention du contraire). De plus, deux angles Sab et $S'a'b'$ peuvent être isométriques sous une isométrie qui transforme Sa en $S'a'$ et Sb en $S'b'$, mais aussi sous une isométrie qui transforme Sa en $S'b'$ et Sb en $S'a'$.

On va voir maintenant qu'il suffit que certaines parties des triangles soient isométriques deux à deux (sans même supposer que ce soit la même isométrie pour chacune) pour que les triangles soient isométriques. Nous démontrerons les trois fameux cas d'isométrie des triangles. Nous aurons besoin du lemme suivant.

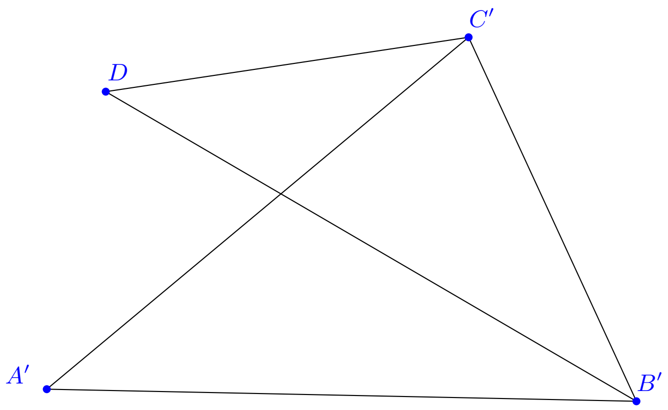
Lemme 1.2. *Deux angles adjacents isométriques sont soit égaux, soit symétriques par rapport à leur côté commun. En particulier, si deux angles adjacents sont isométriques et du même côté de la droite supportant leur côté commun, ils sont égaux.*

Démonstration. Soient Sab et Sab' deux angles rectilignes adjacents et isométriques. Il y a deux cas. Supposons d'abord que l'isométrie fixe le côté commun Sa. Comme elle fixe la droite a, elle est soit l'identité, soit la réflexion d'axe a (axiome de symétrie).



Supposons maintenant que l'isométrie transforme Sa en Sb'. Alors, en la post-composant avec la symétrie d'axe la bissectrice de l'angle Sab', on obtient une isométrie qui fixe Sa et qui transforme Sab en Sab'. On peut appliquer le premier cas. $\square$

Considérons maintenant deux triangles ΔABC et $\Delta A'B'C'$ ayant deux côtés isométriques. Quitte à changer les noms des sommets on peut supposer qu'il s'agit de $[BC]$ et $[B'C']$.



Dans chacun des trois cas d'isométrie qui suivent, nous nous ramènerons au cas illustré ci-dessus où les deux triangles ont un côté commun.

Proposition 1.3 (Premier cas d'isométrie des triangles). *Deux triangles sont isométriques s'ils ont un côté isométrique compris entre deux angles respectivement isométriques.*

Démonstration. Supposons comme ci-dessus que les côtés $[BC]$ et $[B'C']$ sont isométriques. Par conséquent les angles β et β' sont isométriques et les angles γ et γ' également. L'isométrie f nous ramène à la situation où les triangles $\Delta A'B'C'$ et $\Delta DB'C'$ ont un côté commun compris entre des angles isométriques deux à deux.

$\square$

PROPOSITION 1.4 (Deuxième cas d'isométrie des triangles). *Deux triangles sont isométriques s'ils ont un angle isométrique compris entre deux côtés respectivement isométriques.*

DÉMONSTRATION. On suppose des isométries entre $[BC]$ et $[B'C']$, $[BA]$ et $[B'A']$, β et β' respectivement. De même que précédemment, les angles β' et $\widehat{DB'C'}$ sont isométriques, adjacents en $B'C'$ et donc égaux. Donc les demi-droites $[B'A'$ et $[B'D$ coïncident. De plus, $\overline{BA} = \overline{B'A'} = \overline{B'D}$. Par l'axiome de report d'une distance sur une demi-droite, comme A' et D sont sur la même demi-droite d'extrémité B', $A' = D$. En conclusion, l'isométrie f transforme $\triangle ABC$ en le $\triangle A'B'C'$. $\square$

PROPOSITION 1.5 (Troisième cas d'isométrie des triangles). *Deux triangles sont isométriques s'ils ont trois côtés isométriques deux à deux.*

DÉMONSTRATION. On suppose qu'il existe des isométries entre $[BC]$ et $[B'C']$, $[BA]$ et $[B'A']$, $[AC]$ et $[A'C']$ respectivement. On a $\overline{BA} = \overline{B'A'} = \overline{B'D}$ et $\overline{CA} = \overline{C'A'} = \overline{C'D}$. L'axiome de construction d'un triangle affirme qu'il existe exactement deux points qui vérifient ces propriétés par rapport à B' et C'. Ces deux points sont de part et d'autre de la droite $B'C'$. Comme A' et D sont du même côté de cette droite, ils coïncident. $\square$

REMARQUE 1.6. Voici un truc mnémotechnique pour se souvenir des trois cas d'isométrie, dans l'ordre ! Le cas numéro n parle en effet de n côtés de deux triangles, et il faut trois informations dans chaque cas.

Cas 1. **Un** côté compris entre deux angles.

Cas 2. Un angle compris entre **deux** côtés.

Cas 3. **Trois** côtés.

REMARQUE 1.7. En observant la preuve des cas d'isométrie, on voit que l'on peut les préciser comme suit. Supposons que l'on est dans l'un des trois cas suivants :

(1) Soient deux triangles vérifiant le premier cas d'isométrie ("un côté isométrique compris entre deux angles isométriques"). Nommons B et B', C et C' les sommets respectifs des paires d'angles isométriques (les côtés isométriques sont donc les côtés $[BC]$ et $[B'C']$). Soient A et A' les sommets restants.

(2) Soient deux triangles vérifiant le deuxième cas d'isométrie ("un angle isométrique compris entre deux côtés isométriques"). Soient B et B' les sommets des angles isométriques. Soient A et A', respectivement C et C' les sommets tels que les côtés $[AB]$ et $[A'B']$, respectivement $[BC]$ et $[B'C']$ soient isométriques.

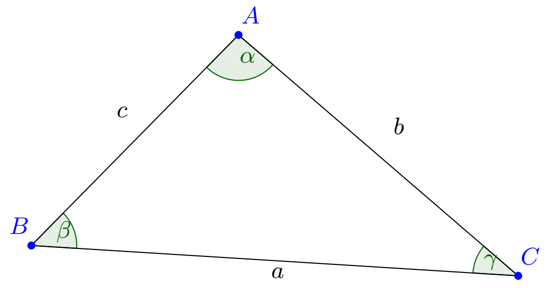
(3) Soient deux triangles vérifiant le troisième cas d'isométrie ("trois côtés isométriques"). Nommons les sommets de sorte que $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ soient respectivement isométriques à $[A'B']$, $[A'C']$ et $[B'C']$.

Alors il existe une isométrie qui transforme le triangle ΔABC en le triangle $\Delta A'B'C'$ dans cet ordre des sommets.

2. Les lignes principales

Nous avons mis en place tous les outils nécessaires à l'étude des figures géométriques élémentaires qui nous intéressent dans ce chapitre, à commencer bien sûr par les triangles.

Soient A, B, C trois points non alignés. Ils forment un triangle ΔABC dont on appelle a le côté opposé à A, b le côté opposé à B et c le côté opposé à C. On appelle encore α l'angle en A, β l'angle en B et γ l'angle en C.



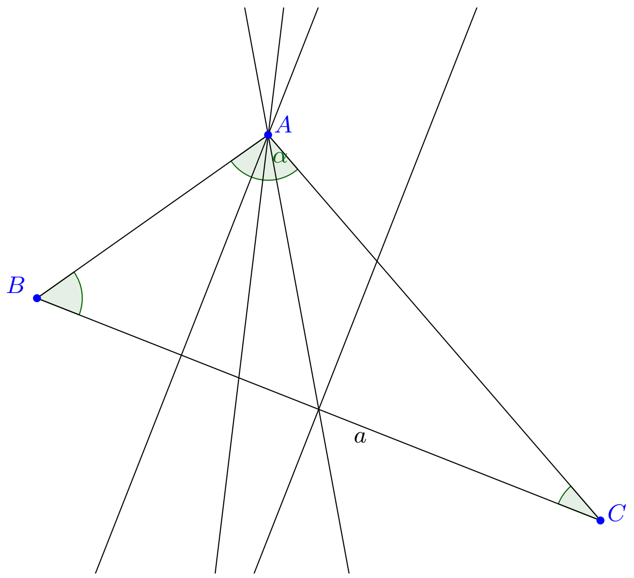
Définition 2.1. Soit un triangle et A l'un de ses sommets, a le côté opposé. Les *lignes principales* de ce triangle relatives au sommet A sont :

(1) *Médiatrice m du côté a.*

(2) *Médiane n issue de A* : droite passant par le sommet A du triangle et le milieu M du côté opposé.

(3) *Hauteur h issue de A* : droite passant par le sommet A du triangle et coupant le support du côté opposé à angle droit.

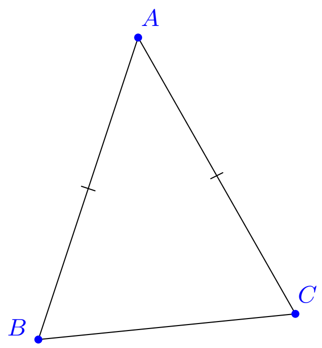
(4) *Bissectrice b de l'angle en A* (ou *issue de A*) du triangle.



3. Les triangles isocèles

Nous sommes prêts à étudier certains triangles remarquables. Comme souvent en géométrie, il est important de savoir clairement quelles sont les définitions et quelles sont les propriétés que l'on doit démontrer. Typiquement les définitions feront intervenir des mesures (de côtés ou d'angles) et on déduira de cela certaines propriétés de symétrie.

Définition 3.1. Un triangle est *isocèle* s'il a deux côtés isométriques. Si un triangle ΔABC a les côtés $[AB]$ et $[AC]$ isométriques, on dit qu'il est *isocèle en A* et que le côté $[BC]$ est sa *base*.



Les trois cas d'isométrie des triangles vont nous permettre de reconnaître un triangle isocèle de nombreuses façons. Parfois il conviendra d'utiliser la définition directement, d'autres fois on préférera comparer deux angles ou deux lignes principales.

Proposition 3.2. *Soit ΔABC un triangle. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) ΔABC est isocèle en A.

(2) Les angles en B et en C sont isométriques.

(3) La médiatrice du côté opposé à A passe par A.

(4) La hauteur et la médiane issues de A sont confondues.

(5) La hauteur et la bissectrice issues de A sont confondues.

(6) Toutes les droites principales relatives au sommet A sont confondues.

Démonstration. On prouve les implications suivantes, il y en a plus que strictement nécessaire, car ces preuves sont des bonnes illustrations des concepts :

$$(2) \iff (1) \iff (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (3) \iff (6)$$

(3) $\Rightarrow$ (4) : Si la médiatrice m du côté opposé à A passe par A, alors elle est égale à la hauteur issue de A car la médiatrice d'un segment coupe perpendiculairement le support du segment. De plus, elle est égale à la médiane puisque la médiatrice d'un segment coupe le segment en son point milieu.

(4) $\Rightarrow$ (5) : Si la hauteur et la médiane issues de A sont confondues (en une droite d), alors d coupe $[BC]$ perpendiculairement en son point milieu. Ainsi, d est la médiatrice de $[BC]$. L'axe d est ainsi un axe de symétrie de l'angle $\widehat{BAC}$, c'est-à-dire sa bissectrice.

(5) $\Rightarrow$ (3) : Supposons que la hauteur et la bissectrice issues de A coïncident (en une droite d). On montre que d est l'axe de symétrie des points B et C et par conséquent que d est la médiatrice du segment $[BC]$. En effet, d étant une hauteur, elle est perpendiculaire à BC, et c'est donc un axe de symétrie de la droite BC. De plus, d étant une bissectrice, la réflexion S_d transforme la demi-droite $[AC$ en la demi-droite $[AB$. Le point C est l'intersection de $[AC$ avec BC et est donc transformé par S_d en l'intersection de $[AB$ et BC, qui est B.

(6) $\Rightarrow$ (3) est clair car (6) est une propriété plus forte. Il reste enfin à montrer que (3)$\Rightarrow$ (6). Or, on sait que (4) et (5) sont vraies et donc hauteur, médiane et bissectrice coïncident. De plus, la médiatrice est égale à la hauteur puisque la médiatrice d'un segment le coupe perpendiculairement. □

Remarque 3.3. Un triangle ΔABC est donc isocèle si et seulement s'il admet un axe de symétrie et cet axe de symétrie est à la fois la hauteur, la médiane, la bissectrice et la médiatrice associées au sommet où le triangle est isocèle.

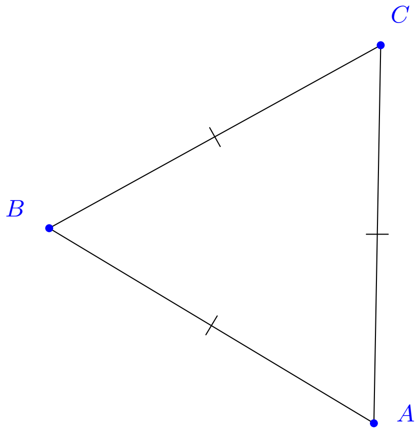
On obtient ainsi un critère d'isométrie des triangles isocèles où seules deux informations suffisent : une longueur d'un segment et une mesure d'un angle.

Corollaire 3.4. *Deux triangles isocèles sont isométriques lorsque leurs bases sont isométriques et les angles opposés aux bases sont isométriques.*

Démonstration. En exercice dans la série ! □

4. Autres triangles particuliers

Les deux autres types de triangles particuliers sont les triangles équilatéraux et les triangles rectangles.



DÉFINITION 4.1. Un triangle est *équilatéral* s'il a trois côtés isométriques.

COROLLAIRE 4.2. *Pour un triangle ΔABC, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) ΔABC est équilatéral.

(2) Tous ses angles sont isométriques.

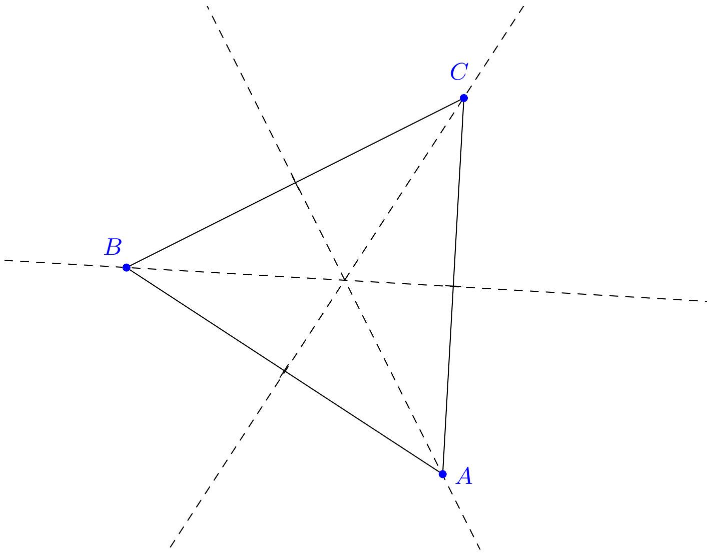
(3) Pour tout sommet P, la médiatrice du côté opposé à P passe par P.

(4) Pour tout sommet P, la hauteur et la médiane issues de P sont confondues.

(5) Pour tout sommet P, la hauteur et la bissectrice issues de P sont confondues.

DÉMONSTRATION. Un triangle équilatéral est isocèle en n'importe lequel de ses sommets. On applique alors la proposition précédente. $\square$

REMARQUE 4.3. Un triangle est donc équilatéral si et seulement s'il admet trois axes de symétrie. Ces axes passent chacun par un sommet et sont à la fois la hauteur, la médiane, la bissectrice et la médiatrice associées au sommet par lequel ils passent.



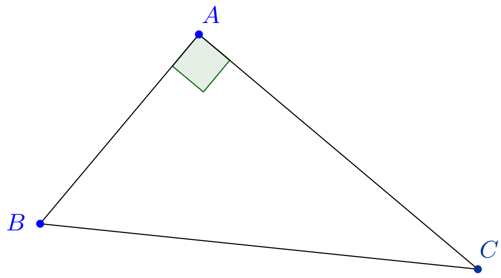
DÉFINITION 4.4. Un triangle est *rectangle* s'il admet un angle droit. L'*hypoténuse* d'un triangle rectangle est le côté opposé à l'angle droit. Les deux autres côtés sont appelés *cathètes*.

PROPOSITION 4.5. *Deux triangles rectangles sont isométriques lorsque l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(1) ils ont l'hypoténuse isométrique et un angle aigu isométrique.

(2) ils ont leurs deux cathètes respectivement isométriques.

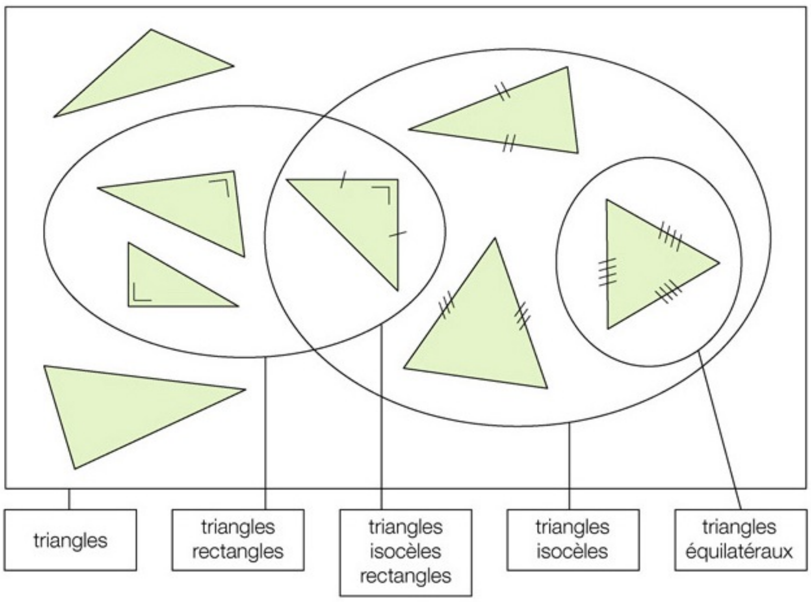
(3) ils ont l'hypoténuse isométrique et un cathète isométrique.



Démonstration. Les conditions sont évidemment nécessaires. Pour montrer que chacune d'elles est suffisante, supposons d'abord que (1) est vraie.

Le point (3) est laissé en exercice ! □

Cartographie des triangles



Chapitre 3

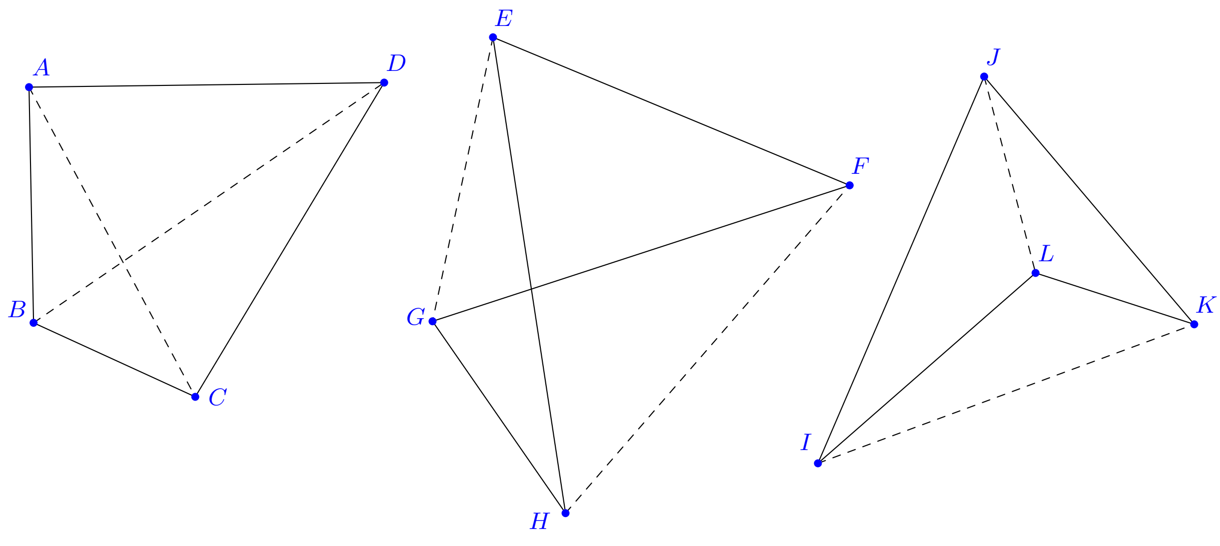
Les quadrilatères

Ce chapitre est consacré aux quadrilatères, puis plus généralement aux polygones. Nous voulons comprendre les propriétés géométriques de certains quadrilatères particuliers : trapèzes, parallélogrammes, rectangles, losanges et carrés.

1. Notions de base sur les quadrilatères

Pour commencer, voici quelques rappels et définitions.

DÉFINITION 1.1. Un *quadrilatère* est un polygone à quatre côtés. Dans un quadrilatère $ABCD$, deux côtés sans sommet commun sont dits *opposés* : $[AB]$ est opposé à $[CD]$ et $[BC]$ est opposé à $[AD]$. Deux sommets n'appartenant pas au même côté sont *opposés*. Un segment qui relie une paire de sommets opposés est appelé *diagonal* et la droite qui le supporte une *diagonale*.



On voit sur cette illustration trois quadrilatères et leurs diagonales en traitillés.

Rappelons qu'un polygone est *simple* si chacun de ses points vérifie la propriété suivante :

(1) soit ce point est un sommet et il n'appartient qu'à deux côtés,

(2) soit ce point n'appartient qu'à un seul côté.

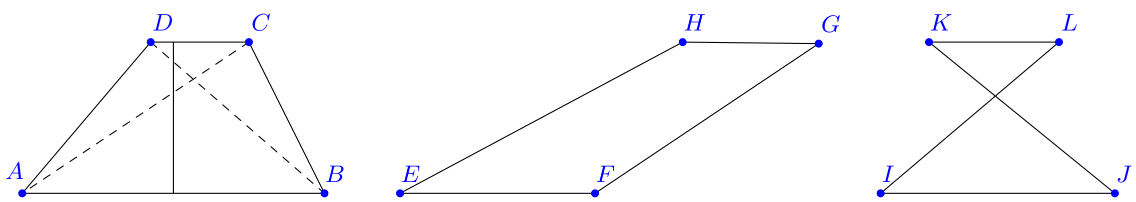
Une figure F du plan est *convexe* si pour toute paire de points distincts A et B de F, le segment $[AB]$ est inclus dans F. Par abus de langage, on dit qu'un polygone est convexe lorsqu'il est simple et que sa surface polygonale associée est convexe.

Remarque 1.2. Un quadrilatère est simple si et seulement si ses côtés opposés ne se coupent pas. Tout polygone convexe est simple par définition. Un quadrilatère est simple si et seulement si au moins un de ses segments diagonaux est inclus dans sa surface polygonale. Un quadrilatère est convexe si et seulement si ses deux segments diagonaux sont inclus dans sa surface. Ces observations sont illustrées par les trois quadrilatères que nous avons vus ci-dessus.

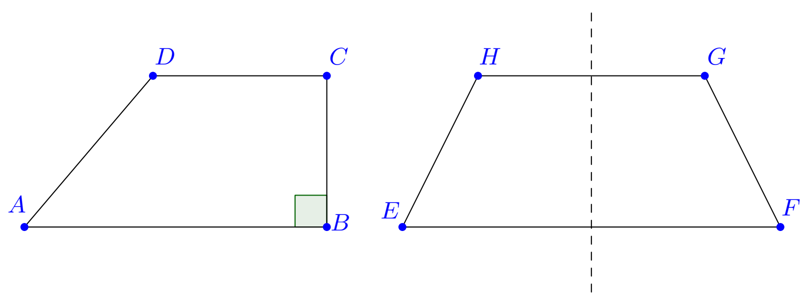
2. Les trapèzes

Les trapèzes ont deux côtés parallèles. On les dessine souvent horizontalement, parce que l'on pense au plus grand de ces deux côtés comme la "base" du trapèze.

Définition 2.1. Un *trapèze* est un quadrilatère qui a deux côtés parallèles, appelés *bases*. Les deux autres côtés sont dits *latéraux*. La distance entre les deux côtés parallèles s'appelle la *hauteur* du trapèze.



Définition 2.2. Un trapèze est *rectangle* s'il possède un angle droit. Un trapèze est *isocèle* lorsque ses bases ont leurs médiatrices confondues.



Un trapèze isocèle a un axe de symétrie formé par la médiatrice des deux bases. En particulier les quatre angles du trapèze isocèle sont isométriques deux par deux.

3. Les parallélogrammes

Nous étudions maintenant un type de trapèze particulier. Les bases sont toujours parallèles, mais nous supposons de plus que les deux autres côtés sont également parallèles.

DÉFINITION 3.1. Un *parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.

REMARQUE 3.2. Tout parallélogramme peut être vu comme un trapèze de deux manières différentes.

PROPOSITION 3.3. *Tout parallélogramme possède un unique centre de symétrie, qui est le point d'intersection des diagonales.*

DÉMONSTRATION. Soit $ABCD$ un parallélogramme et O un centre de symétrie de $ABCD$. Nous montrons d'abord que la symétrie S_O ne peut pas transformer A en B. En effet, O serait un centre de symétrie du côté $[AB]$. Comme $CD /\!/ AB$, O n'appartient pas la droite CD. Donc la symétrie S_O ne laisse pas fixe la droite CD et la transforme en une droite parallèle distincte de AB car ne passant pas par O. Ainsi, l'image du segment $[CD]$ sous S_O ne peut être aucun des trois autres côtés du parallélogramme, ce qui contredit l'hypothèse que O est un centre de symétrie. De la même manière, on montre que la symétrie S_O ne peut pas transformer A en D.

Ainsi, elle doit transformer A en C, et donc B en D (car une isométrie transforme un sommet en un sommet, est injective et seul le centre d'une symétrie centrale est fixe). Ainsi O doit être le point d'intersection des diagonales puisque chacune d'elles est transformée en elle même.

Il reste encore à montrer que le centre de symétrie existe.

Ainsi, O est bien centre de symétrie du parallélogramme. $\square$

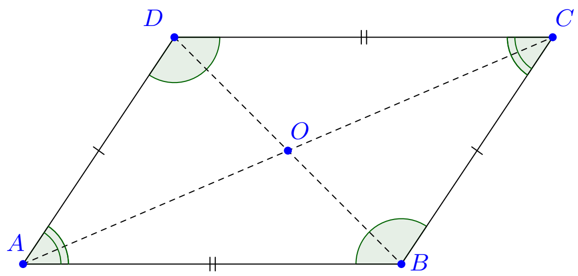
Corollaire 3.4. *Soit $ABCD$ un parallélogramme. Alors*

(1) Les côtés parallèles sont isométriques.

(2) Les angles opposés sont isométriques.

(3) Les segments diagonaux se coupent en leur milieu, qui est le centre de symétrie du parallélogramme.

(4) Tout parallélogramme est convexe.



Réciproquement, les propriétés énoncées ci-dessus caractérisent les parallélogrammes. Une partie des vérifications est laissée en exercice.

Proposition 3.5. *(1) Tout quadrilatère* simple *qui a deux côtés isométriques et parallèles est un parallélogramme.*

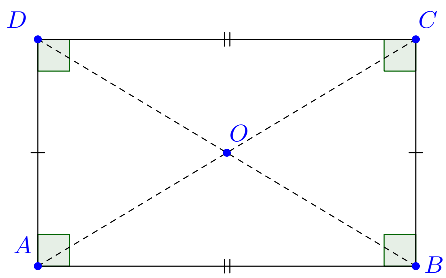
(2) Tout quadrilatère simple *dont les côtés opposés sont isométriques deux à deux est un parallélogramme.*

(3) Tout quadrilatère dont les segments diagonaux se coupent en leur milieu est un parallélogramme.

4. Les rectangles

Après les trapèzes et les parallélogrammes, nous nous spécialisons encore plus ! Nous imposons une restriction très forte sur les angles pour définir les rectangles.

Définition 4.1. Un *rectangle* est un parallélogramme qui possède un angle droit (et donc quatre).



Proposition 4.2. *Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si ses segments diagonaux sont isométriques et se coupent en leur milieu.*

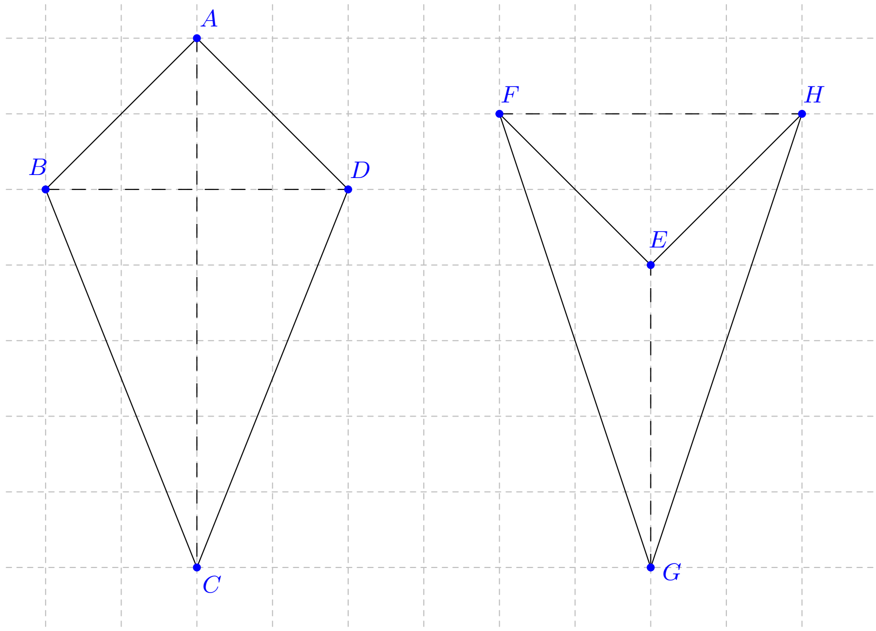
DÉMONSTRATION. Soit $ABCD$ un rectangle. Comme c'est un parallélogramme, on sait déjà que ses segments diagonaux se coupent en leur milieu. Il reste à montrer qu'ils sont isométriques. Soit m la médiatrice du segment $[AB]$.

Réciproquement, supposons que les segments diagonaux d'un quadrilatère $ABCD$ soient isométriques et se coupent en leur milieu. Il s'agit donc d'un parallélogramme par la proposition précédente. Il reste à montrer qu'il possède un angle droit. Soit O le point d'intersection des segments diagonaux.

L'angle $\measuredangle ABC$ est donc droit. $\square$

5. Les rhomboïdes

Les derniers quadrilatères que nous étudions sont les rhomboïdes. Chez Euclide ce terme désignait aussi ce que nous appelons aujourd'hui parallélogramme. L'usage fait que de nos jours les rhomboïdes désignent deux types de quadrilatères.



Définition 5.1. Un *rhomboïde* est un quadrilatère symétrique par rapport à l'une de ses diagonales. Les rhomboïdes convexes sont appelés *cerfs-volants* et les non convexes *fers de lance.*

Proposition 5.2. *Tout rhomboïde est simple. De plus, dans un rhomboïde,*

(1) les diagonales sont perpendiculaires,

(2) il existe une paire d'angles opposés isométriques,

(3) il existe deux paires de côtés consécutifs isométriques.

Démonstration. L'une des diagonales, appelons-la d, étant un axe de symétrie, l'autre est transformée en elle même par la symétrie axiale d'axe d. Elle doit donc être perpendiculaire à d, ce qui prouve (1). Les assertions (2) et (3) découlent directement du fait que S_d préserve les mesures des angles et des segments. $\square$

Définition 5.3. Un *losange* est un quadrilatère symétrique par rapport à ses deux diagonales.

Un losange est donc un rhomboïde de deux points de vue, et même mieux, puisque les deux diagonales se trouvent en son intérieur, un losange est un cerf-volant de deux points de vue.

PROPOSITION 5.4. *Tout losange est convexe. De plus, dans un losange,*

(1) les diagonales sont perpendiculaires,

(2) les angles opposés sont isométriques,

(3) les quatre côtés sont isométriques. En particulier, tout losange est un parallélogramme.

Réciproquement, tout quadrilatère simple dont les côtés sont isométriques est un losange.

DÉFINITION 5.5. Un *carré* est un losange rectangle.

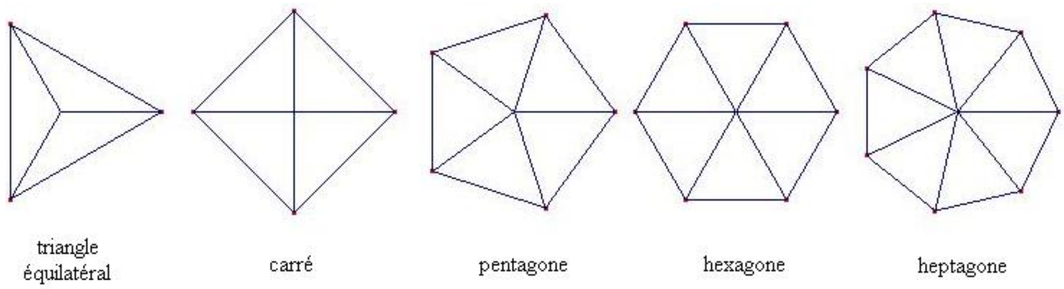
6. Polygones réguliers

Pour terminer nous voyons un type de polygone à plus de 4 côtés très particuliers, les polygones réguliers.

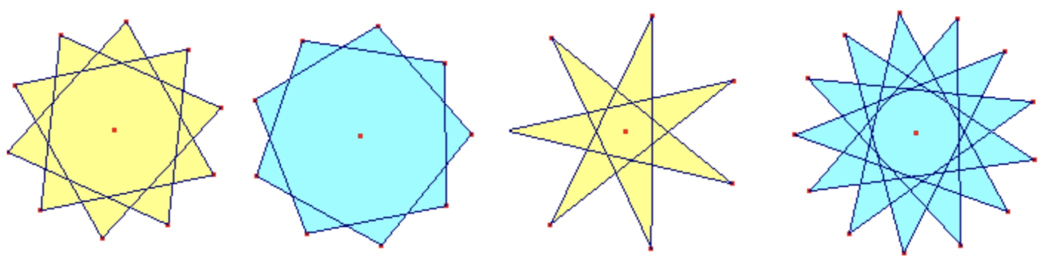
Définition 6.1. Un *polygone régulier* est un polygone dont tous les côtés sont isométriques et tous les angles sont isométriques.

Les polygones réguliers que nous avons déjà rencontrés sont le triangle équilatéral et le carré. Pour définir le triangle équilatéral, il suffit d'exiger que ses trois côtés sont isométriques et nous en avons déduit que ses trois angles mesurent 60°. Ce n'est plus suffisant, même pour les quadrilatères (vois-tu pourquoi ?) et un polygone régulier à quatre côtés est un carré.

Voici quelques polygones réguliers convexes :



Les polygones réguliers non convexes sont des polygones réguliers étoilés :



Chapitre 4

Points remarquables des triangles

Notre but est de comprendre pourquoi les médiatrices d'un triangle se coupent en un seul point et quelle propriété remarquable ce point possède. Nous nous intéresserons bien sûr à la même question pour les bissectrices, les médianes et les hauteurs. Puisque souvent les propriétés des points remarquables sont liées à certains cercles, nous commençons d'abord par l'étude de la position relative des cercles et des droites.

1. Position relative de deux cercles

Nous avons étudié tout au début du premier fascicule de géométrie la position relative de deux droites. Grâce aux axiomes d'incidence nous avions compris que deux droites peuvent être confondues, sécantes ou parallèles. Nous nous intéressons maintenant aux différentes positions possibles pour deux cercles, puis pour un cercle et une droite.

Définition 1.1. Deux cercles sont *tangents* lorsqu'ils ont un unique point commun. Deux cercles sont *sécants* lorsqu'ils s'intersectent en deux points. Deux cercles sont *concentriques* s'ils ont le même centre.

Deux cercles distincts ont au plus deux points en commun, puisque nous avons vu que trois points non colinéaires déterminent un unique cercle. Deux cercles distincts peuvent avoir suivant les cas deux, un ou zéro points en commun.

Nous allons utiliser le résultat intermédiaire suivant dont la preuve est en exercice (axiomes D.4 et D.5)

Lemme 1.2. *Soient A, B deux points distincts et C un point aligné avec A et B. Si P vérifie $\overline{PA} = \overline{CA}$ et $\overline{PB} = \overline{CB}$, alors $P = C$.*

Pour préparer les propositions suivantes, nous allons prouver que si deux cercles s'intersectent en un point aligné avec leurs centres, alors ils sont tangents.

Lemme 1.3. *Soient c et c' deux cercles de centre O et O' respectivement. Si C est un point qui appartient à c, c' et à la droite OO', alors les cercles c et c' sont tangents.*

Démonstration. Supposons que c et c' s'intersectent en un point C aligné avec O et O'. Pour prouver que les cercles c et c' sont tangents, nous montrons qu'il n'existe pas d'autre point d'intersection.

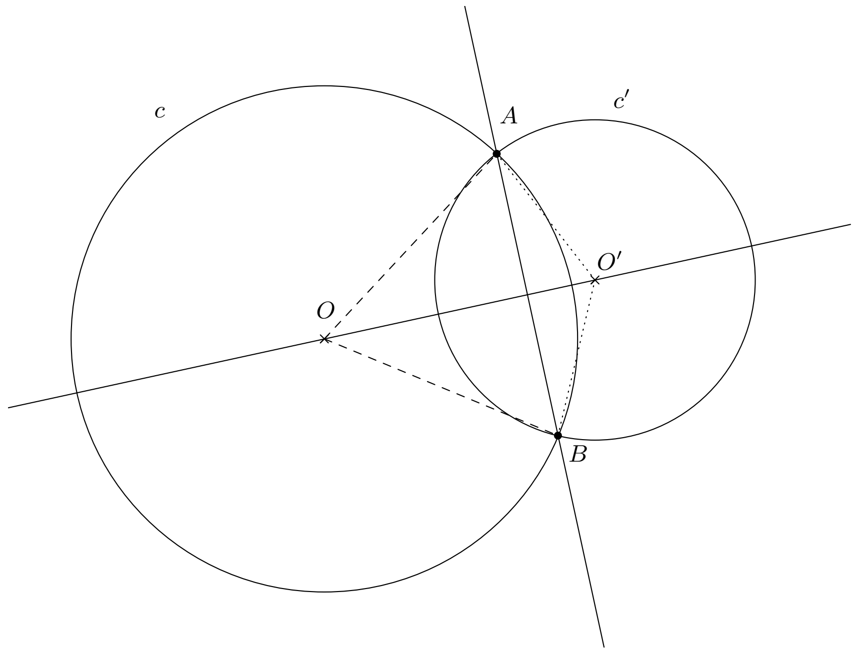
Or, si P était un autre point sur appartenant à c et c', alors $\overline{PO} = \overline{CO}$ car ce sont des rayons de c et $\overline{PO'} = \overline{CO'}$ car ce sont des rayons de c'. Par le lemme précédent on conclut que $P = C$. $\square$

Proposition 1.4. *Soient deux cercles c et c' respectivement de centres O et O' distincts et de rayons r et r'. Alors c et c' sont sécants si et seulement si*

$$\boxed{|r - r'| < \overline{OO'} < r + r'.}$$

De plus, dans ce cas, la droite des centres OO' est la médiatrice des points d'intersection des deux cercles.

Démonstration. Supposons que c et c' soient sécants en A et B. Alors A et B ne peuvent être alignés avec O et O' par ce qui précède (sinon c et c' seraient tangents). Donc le point A forme un triangle avec O et O' et par l'inégalité triangulaire, sachant que A est sur c et sur c', l'inégalité de la proposition est vraie.



De plus, par l'axiome de construction des triangles, on sait qu'il existe exactement deux points à distance r de O et r' de O' vu que l'inégalité triangulaire est vérifiée et on sait que ces deux points sont symétriques par rapport à OO'. Ces deux points sont A et B et donc la droite OO' est la médiatrice de A et B.

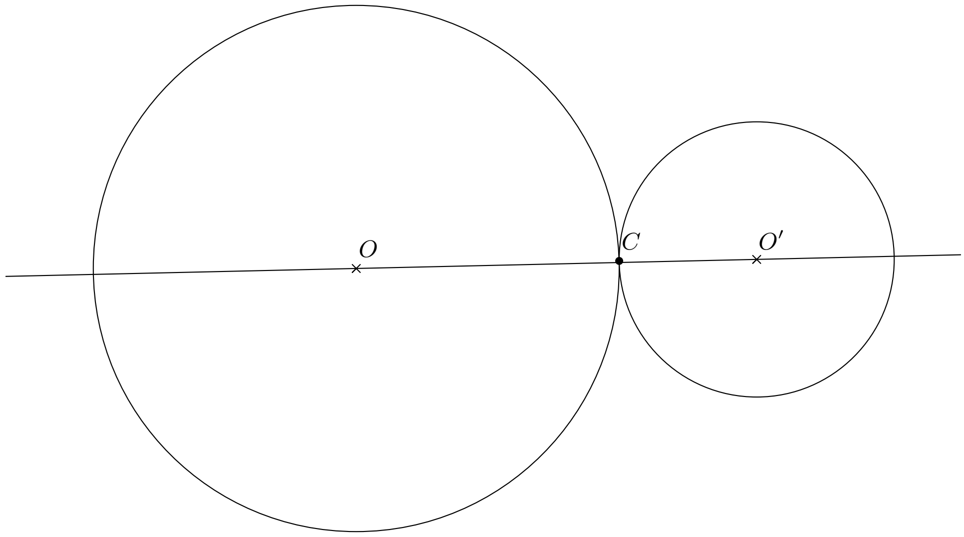
Inversement, si l'inégalité est vérifiée, alors par l'axiome de construction des triangles, il existe exactement deux point A et B qui sont à distance r de O et r' de O', c'est-à-dire qui sont à la fois sur c et sur c'. □

Proposition 1.5. *Soient deux cercles c et c' respectivement de centres O et O' distincts et de rayons r et r'. Alors c et c' sont tangents si et seulement si*

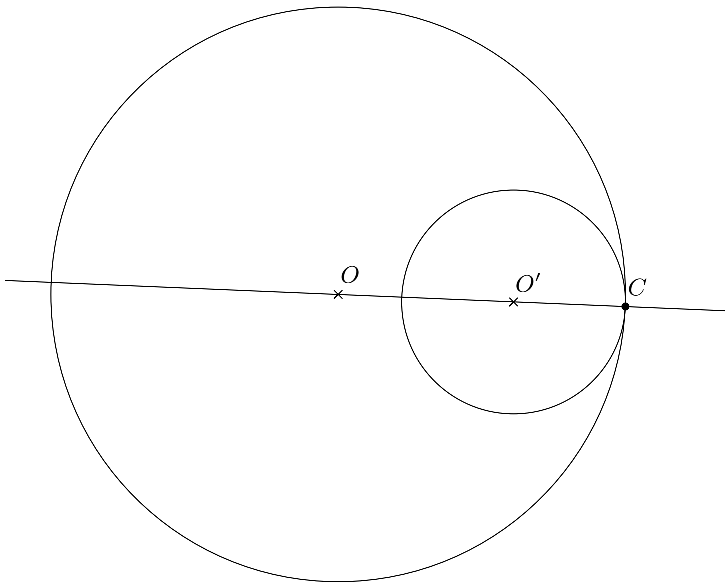
$$\boxed{\overline{OO'} = r + r' \text{ ou } \overline{OO'} = |r - r'|.}$$

De plus, dans ce cas, le point de tangence est aligné avec les centres.

Démonstration. Supposons que c et c' soient tangents en un point C. Alors C doit être aligné avec O et O' car sinon, comme on l'a vu ci-dessus, on aurait automatiquement un deuxième point commun à c et c', symétrique de C par rapport à l'axe OO'. Finalement, on a déjà constaté dans la preuve du Lemme 1.3 que dans cette situation, l'une des égalités de la proposition est vérifiée. On voit ici le cas $\overline{OO'} = r + r'$:



et ci-dessous celui où $\overline{OO'} = |r - r'|$:



Réciproquement, si c et c' vérifient l'égalité, alors on montre comme dans le lemme, par les axiomes D.4 et D.5, qu'il existe un unique point commun au cercles c et c'. $\square$

Remarque 1.6. Deux cercles concentriques sont soit égaux, soit disjoints.

2. Position relative d'un cercle et d'une droite

Nous pouvons maintenant étudier la question de l'intersection d'un cercle et d'une droite. Soit c un cercle et d une droite. Nous allons voir que l'étude des points d'intersection d'un cercle c et d'une droite d revient à étudier les points d'intersection de deux cercles, le cercle c et son image sous la réflexion d'axe d. En particulier, on en conclut qu'un cercle et une droite peuvent avoir au plus deux points d'intersection. On se concentre donc dès maintenant sur le cas d'un cercle de rayon strictement positif.

DÉFINITION 2.1. Soit d une droite et c un cercle. La droite d est *tangente* à c si elle intersecte c en un unique point. La droite d est une *sécante* du cercle c si elle intersecte c en deux points.

Si le rayon du cercle est nul, alors le cercle est un point. Donc une droite est soit tangente, soit extérieure à un cercle de rayon nul. De plus, on sait déjà qu'un point appartient à une droite si et seulement si sa distance à la droite est nulle.

COROLLAIRE 2.2. *Soit c un cercle de centre O et de rayon $r > 0$ et d une droite.*

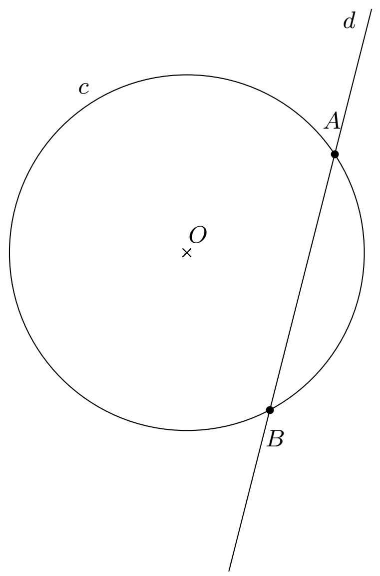
(1) La droite d est une sécante de c si et seulement si $d(O, a) < r$. Dans ce cas, soit elle est un diamètre, soit elle est perpendiculaire au diamètre passant par le milieu des points d'intersection.

(2) La droite d est tangente au cercle c si et seulement si $d(O, a) = r$. Dans ce cas, elle est perpendiculaire au diamètre passant par le point de tangence.

DÉMONSTRATION. Considérons d'abord le cas où la droite passe par le centre du cercle ($d(O, a) = 0$).

On sait alors qu'il existe exactement deux points sur d qui sont à distance r de O (vu que $r > 0$). Donc dans ce cas, la droite est sécante (en fait c'est un diamètre du cercle).

Supposons maintenant que la droite d ne passe pas par le centre O de c. Soit c' et O' les symétriques de c et O sous la réflexion d'axe d. La figure c' n'est autre que le cercle de centre O' et de rayon r (on utilise le fait qu'une isométrie préserve les distances, et que son inverse aussi). Maintenant, les points d'intersection de c et d sont les points d'intersections de c et c'.

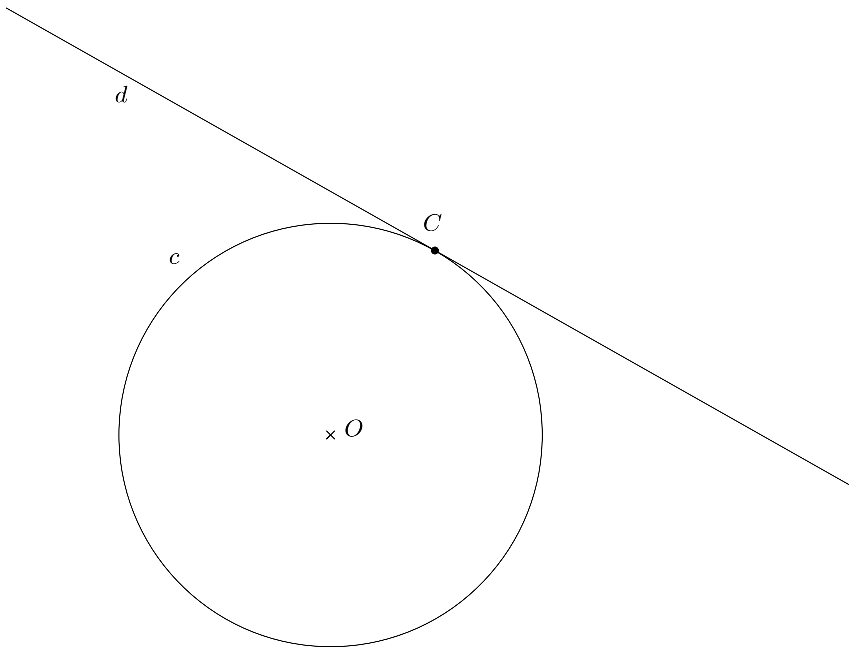


En effet, si $P \in c \cap d$, alors P est fixé par la réflexion d'axe d et donc P est aussi sur c'. Réciproquement, si $P \in c \cap c'$, alors P est à équidistance de O et O' et donc sur la médiatrice de O et O', soit d. Finalement, par ce qui précède, la distance de O et O' est égale au double de la distance de O à d, vu que d est la médiatrice de O et O'. De plus, d et OO' sont perpendiculaires.

Ainsi, par la proposition précédente (qui s'applique car $O \neq O'$ vu que O n'est pas sur l'axe de la symétrie), il y a deux cas :

(1) Le cercle c et la droite d ont deux points d'intersection $\iff$ c et c' sont sécants $\iff$ $\overline{OO'} < 2r$ $\iff$ $d(O,d) < r$, comme dans l'illustration ci-dessus. De plus, la droite des centres est la médiatrice de A et B, par la proposition précédente. Donc elle passe par le milieu de ces deux points et est perpendiculaire à d.

(2) Le cercle c et la droite d sont tangents $\iff$ les cercles c et c' le sont $\iff$ $\overline{OO'} = 2r \iff d(O,d) = r$.



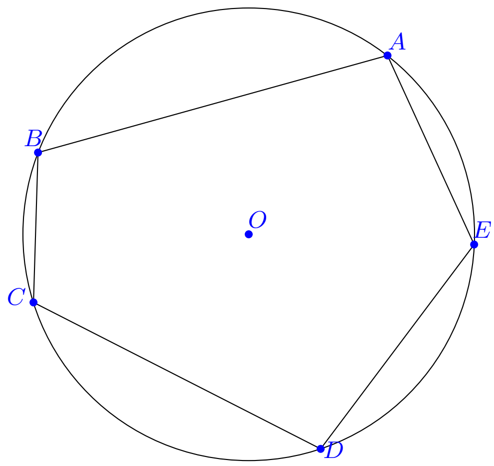
De plus, on sait par la proposition que le point de tangence C est aligné avec les centres O et O'. Ainsi, $OO' = OC$ et donc OC est perpendiculaire à la tangente.

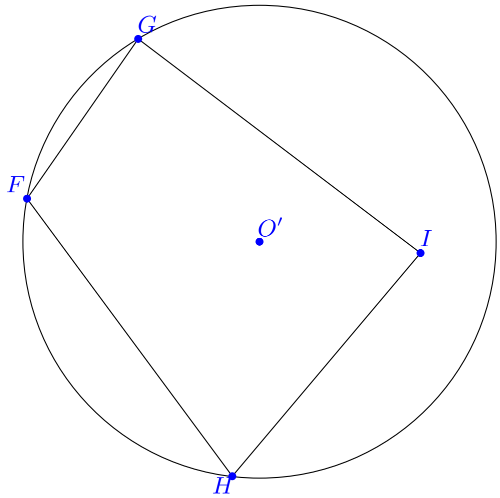
□

3. Le cercle circonscrit

Nous sommes prêts à revenir à l'étude des triangles et de leurs points remarquables. Nous verrons dans cette section que tout triangle s'inscrit dans un cercle, c'est-à-dire que celui-ci passe par les trois sommets du triangle.

Définition 3.1. Un polygone F est *inscrit* dans un cercle Γ si tous ses sommets appartiennent à Γ. On dit qu'il est *inscriptible* s'il existe un tel cercle. Le cercle C est dit *circonscrit* au polygone F.





Quels polygones sont inscrits dans un cercle ? Commençons par étudier le cas des triangles. Nous allons montrer qu'il existe toujours un unique cercle circonscrit. Autrement dit, par trois points non colinéaires passe un et un seul cercle. Par contre la figure ci-dessus montre qu'en général un polygone n'admet pas de cercle circonscrit. Ce n'est le cas que lorsque tous les sommets du polygone se trouvent à équidistance d'un même point (le centre du cercle).

THÉORÈME 3.2. *Tout triangle est inscriptible dans un unique cercle. Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes et le centre du cercle circonscrit au triangle est le point d'intersection des trois médiatrices.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, montrons que s'il existe un cercle circonscrit à un triangle ΔABC, alors il est uniquement déterminé. En effet, supposons qu'il existe un tel cercle et soit O son centre. Alors O est à équidistance des sommets A, B et C.

Montrons maintenant qu'un tel cercle existe toujours.

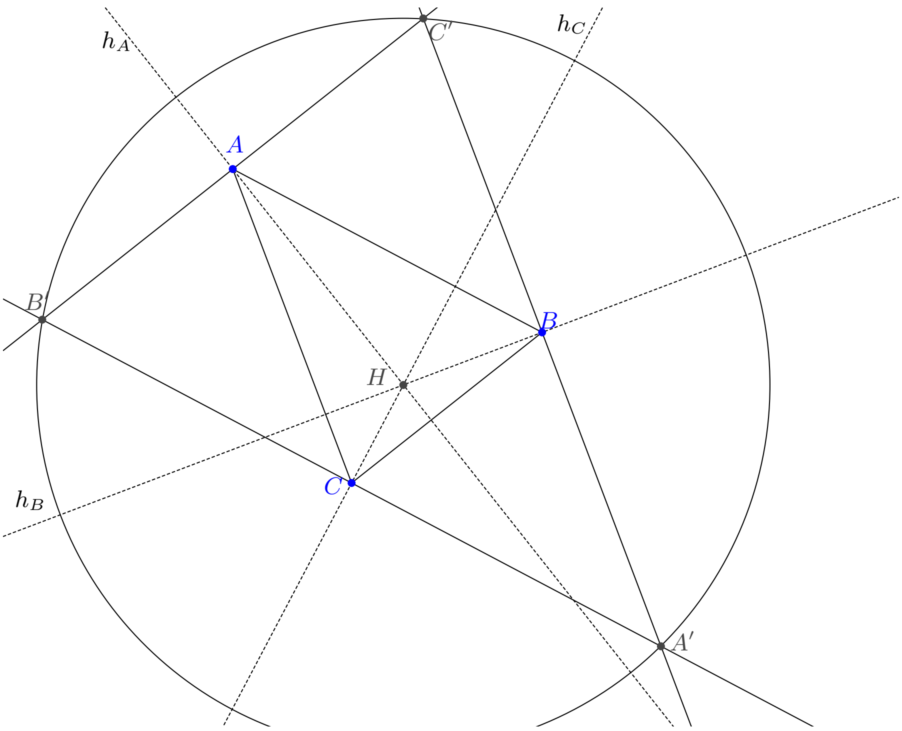
DÉFINITION 3.3. Soit ΔABC un triangle. Le cercle qui passe par A, B et C est appelé le *cercle circonscrit du triangle*.

REMARQUE 3.4. Dans le cas particulier d'un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse (la preuve est en exercice cette semaine).

4. L'orthocentre

Nous avons appris que les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un point, le centre du cercle circonscrit au triangle. Qu'en est-il des autres droites particulières du triangle ? Nous étudierons ici le cas des hauteurs. Le point d'intersection des hauteurs d'un triangle est le plus mystérieux des quatre points remarquables que nous verrons cette année. Sa signification géométrique est la moins transparente, ce qui se traduit aussi dans le fait qu'il n'y a pas d'analogue tridimensionnel de l'orthocentre pour les tétraèdres...

THÉORÈME 4.1. *Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.*



DÉFINITION 4.2. Le point d'intersection des hauteurs s'appelle l'*orthocentre* du triangle.

REMARQUE 4.3. On démontre ce théorème en montrant que les hauteurs du triangle sont les médiatrices d'un triangle associé, appelé *triangle augmenté*, obtenu en menant par chacun des sommets la parallèle au côté opposé. Dans l'illustration ci-dessus la hauteur h_A issue de A est perpendiculaire au côté opposé $[BC]$ et donc également à $[B'C']$. Comme de plus h_A passe par le milieu de ce segment il s'agit de la médiatrice de $[B'C']$. L'orthocentre est donc le centre du cercle circonscrit du triangle augmenté.

5. Le centre de gravité

Les médianes d'un triangle joignent un sommet au milieu du côté opposé. Elles aussi se coupent en un point. Nous nous appuyons sur le résultat de la série du jour qui nous assure que dans un triangle le segment dont les extrémités sont les milieux de deux côtés est toujours parallèle au troisième côté du triangle et mesure exactement la moitié.

THÉORÈME 5.1. *Les médianes d'un triangle concourent en un point intérieur du triangle, situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet correspondant.*

DÉMONSTRATION. Les médianes g_A issue de A et g_B issue de B se coupent en un point intérieur du triangle puisqu'elles se trouvent à l'intérieur des angles. Appelons G ce point. Nous devons montrer que ce point se trouve aussi sur la troisième médiane g_C. Pour ce faire nous introduisons les points milieux D du segment $[AG]$ et E du segment $[BG]$.

Définition 5.2. Le point d'intersection des médianes s'appelle le *barycentre* ou *centre de gravité* du triangle.

Le centre de gravité G tire son nom de la caractérisation physique de ce point remarquable. Si le triangle était découpé dans une plaque homogène il tiendrait parfaitement en équilibre s'il était posé sur une pointe placée en son centre de gravité. Une manière de se souvenir du fait (intuitif ?) que les médianes se coupent au deux tiers de leur distance est donné par le fait que G s'obtient comme “moyenne des trois sommets”. On imagine ici que tout le poids du triangle se trouve en ses sommets (disons que les sommets sont des billes de plomb identiques).

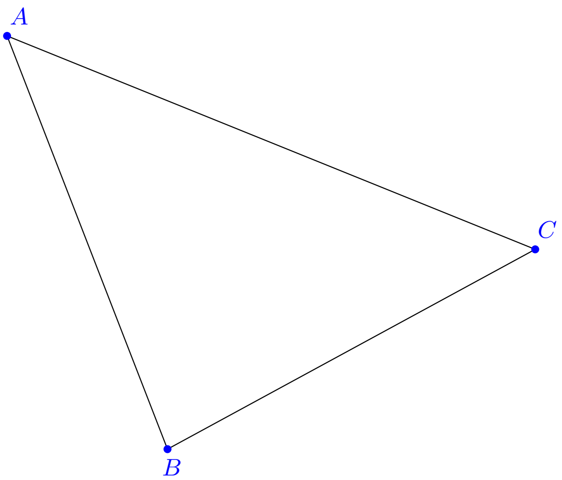
6. Le cercle inscrit

Nous terminons ce chapitre par le quatrième point remarquable du triangle : le point d'intersection des bissectrices.

Définition 6.1. Un polygone F est *circonscrit* à un cercle Γ si chacun de ses côtés est tangent à Γ. On dit qu'il est *circonscriptible* s'il existe un tel cercle. Le cercle Γ est dit *inscrit* dans le polygone F.

Théorème 6.2. *Tout triangle est circonscriptible à un unique cercle. Les bissectrices d'un triangle sont concourantes et leur point d'intersection est le centre du cercle inscrit.*

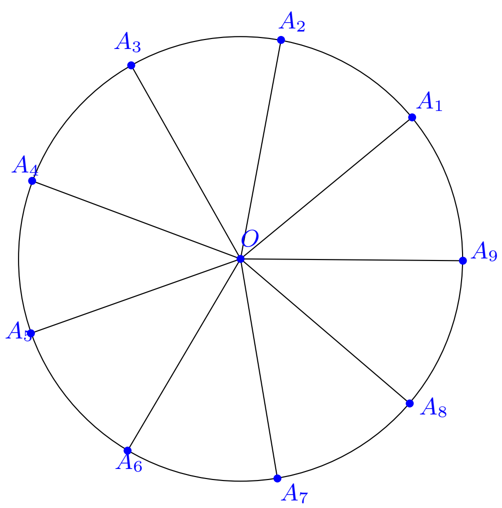
Démonstration. Unicité : Si un triangle est circonscriptible, alors le centre I du cercle inscrit doit se trouver à l'intérieur du triangle (sans preuve).



Définition 6.3. L'unique cercle inscrit dans un triangle est appelé le *cercle inscrit du triangle.*

7. Deux observations sur les polygones réguliers

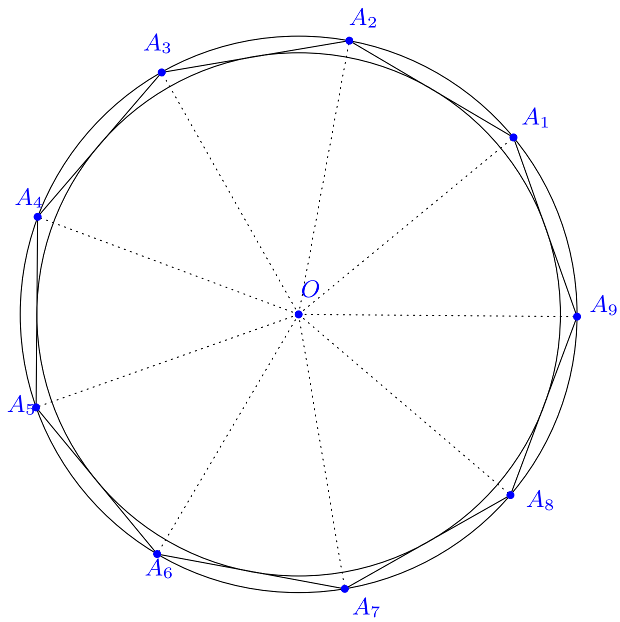
Les polygones réguliers convexes sont tous inscriptibles et circonscriptibles. Ils admettent donc à la fois un cercle inscrit (les bissectrices sont concourantes) et un cercle circonscrit (les médiatrices sont concourantes). De plus les deux centres sont les mêmes !



Prenons le problème à l'envers pour expliquer cela. Considérons un cercle de centre O, traçons un rayon $[OA_1]$, puis d'autres rayons $[OA_2], [OA_3], \dots, [OA_n]$ de telle sorte que les angles $\widehat{A_1OA_2}, \widehat{A_2OA_3}, \dots, \widehat{A_{n-1}OA_n}$ et aussi $\widehat{A_nOA_1}$ mesurent tous $\dfrac{360°}{n}$.

Les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ déterminent alors un polygone régulier puisque le deuxième cas d'isométrie des triangles permet de conclure que $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \cdots = \overline{A_nA_1}$. Ce polygone est inscrit dans le cercle que nous avons tracé.

D'autre part les médiatrices de chacun des côtés se coupent également en O puisque chaque triangle $\Delta OA_1A_2, \Delta OA_2A_3, \dots$ est isocèle. Ainsi le centre du cercle inscrit coïncide avec le centre du cercle circonscrit.



A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
A_7
A_8
A_9
O

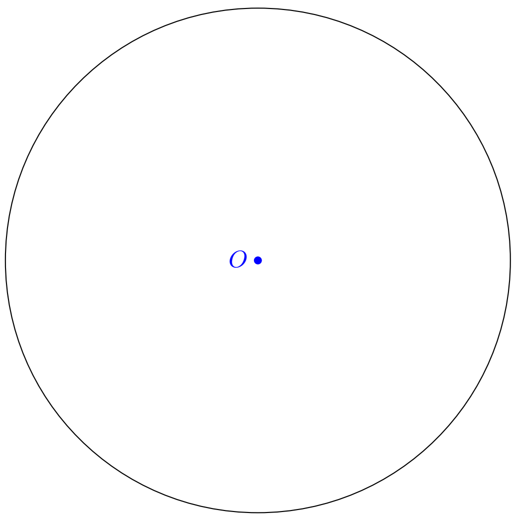
Chapitre 5

Les doubles arcs capables

Nous étudions dans ce chapitre un grand théorème de la géométrie plane. Il donne une caractérisation du cercle comme lieu géométrique qui vous surprendra peut-être et porte le nom du mathématicien Thalès. Vous verrez qu'il aura des conséquences multiples. Il nous permettra de construire facilement des triangles rectangles par exemple et nous aidera à tracer des tangentes à un cercle. Ce théorème est en fait un cas très particulier d'une construction plus générale, celle du double arc capable, mais avant d'y arriver nous aurons besoin du Théorème de l'angle inscrit.

1. Le Théorème de l'angle inscrit

Le Théorème de l'angle inscrit donne une relation entre deux types d'angles, les angles inscrits justement et les angles au centre. Tous deux sont définis par rapport à un cercle.



DÉFINITION 1.1. Un *angle inscrit* dans un cercle c est un angle-plan saillant tel que son sommet est sur c et ses côtés sont sécants à c. Si un angle Sab est inscrit

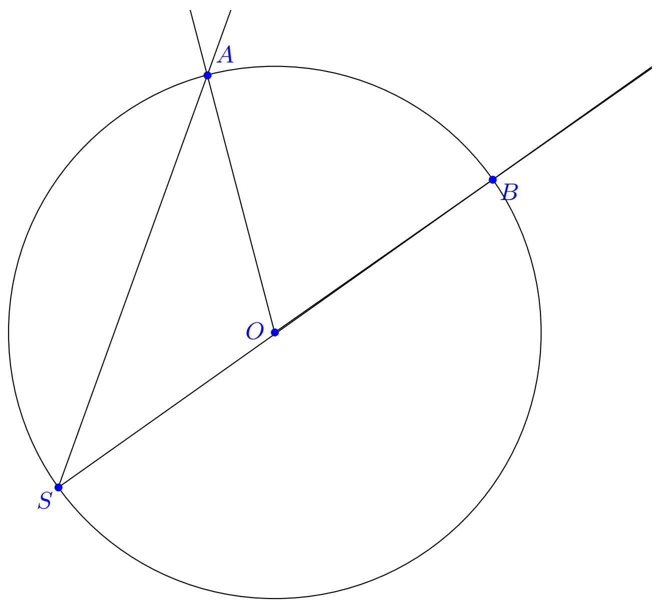
dans un cercle c, alors l'intersection de Sab et de c est formée du point S et d'un arc $\widehat{AB}$. On dit que l'angle inscrit Sab *intercepte* l'arc $\widehat{AB}$.

DÉFINITION 1.2. Un *angle au centre* d'un cercle c est un angle-plan de sommet le centre du cercle c. L'intersection du cercle c et de l'angle au centre Oab est un arc $\widehat{AB}$. On dit que Oab *intercepte* l'arc $\widehat{AB}$ sur c.

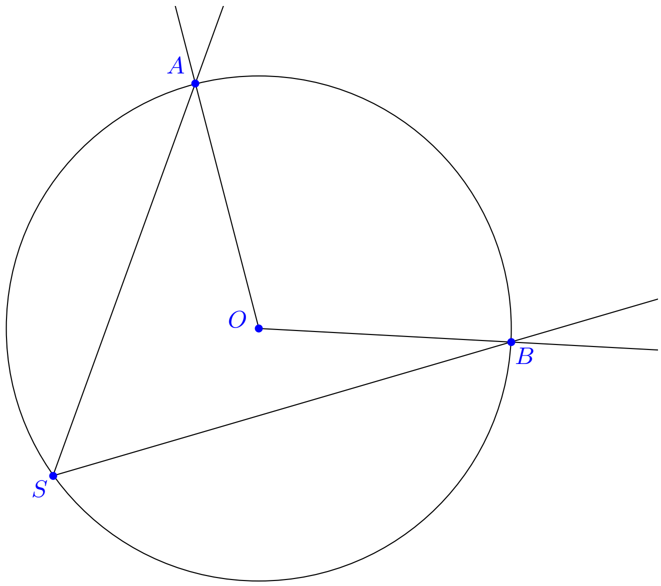
REMARQUE 1.3. Un arc sur un cercle c détermine un unique angle au centre de ce cercle, mais il y a une infinité d'angles inscrits interceptant un même arc.

THÉORÈME 1.4. **de l'angle inscrit.** *La mesure d'un angle $\widehat{ASB}$ inscrit dans un cercle c est la moitié de celle de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptant le même arc.*

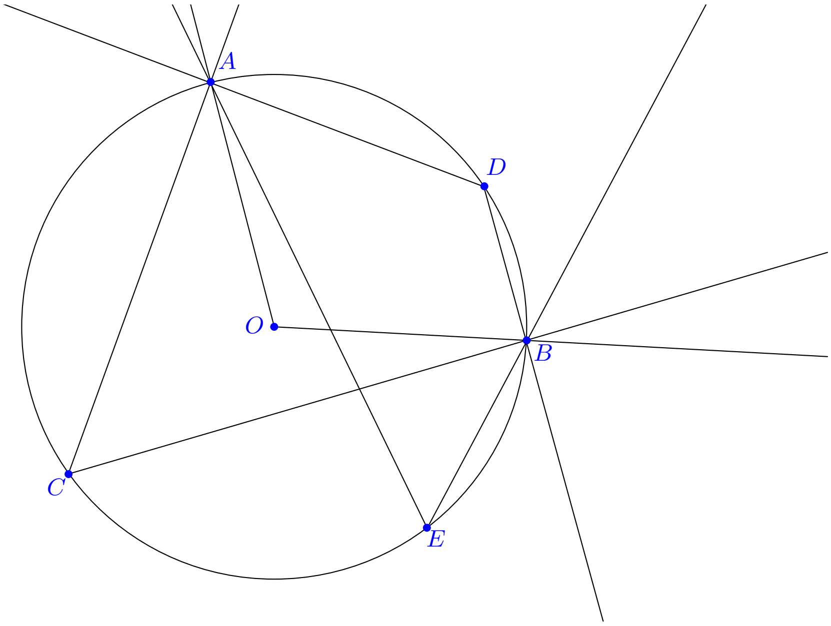
DÉMONSTRATION. Nous démontrons le cas où le centre O du cercle se trouve sur SB. Les autres cas s'obtiennent par addition ou soustraction d'angles se trouvant dans cette situation particulière.



Dans le cas général, $[SB]$ et $[SA]$ ne sont pas des diamètres du cercle et il y a deux situations. Soit O se trouve à l'intérieur de l'angle plan $\widehat{ASB}$, soit il se trouve à l'extérieur. Ce dernier cas est laissé en exercice, faisons rapidement le premier.



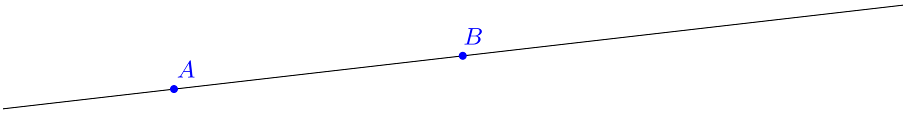
Remarque 1.5. La mesure d'un angle inscrit dans un cercle c interceptant l'arc $\widehat{AB}$ vaut $180° - \alpha/2$ où α est l'angle au centre de c interceptant le complémentaire de l'arc $\widehat{AB}$ de c. Dans la figure suivante l'arc de cercle $\widehat{AB}$ intercepté par l'angle $\widehat{ADB}$ n'est pas le même que celui intercepté par $\widehat{AEB}$!



L'angle $\widehat{AEB}$, tout comme $\widehat{ACB}$ mesure la moitié de l'angle au centre *saillant* $\alpha = \widehat{AOB}$, alors que $\widehat{ADB}$, interceptant le même arc que l'angle au centre *rentrant* $\widehat{AOB} = 360° - \alpha$, mesure donc la moitié, c'est-à-dire $180° - \alpha/2$.

2. Le double arc capable

On dit qu'un segment $[AB]$ *est vu sous un angle de mesure* α *d'un point* P si l'angle-plan saillant $\widehat{APB}$ mesure α, où $P \neq A, B$. Un tel angle est toujours compris entre 0° et 180°.



Le segment $[AB]$ sans ses extrémités est le lieu géométrique des points d'où l'on voit le segment $[AB]$ sous un angle de 180°. Le complémentaire $AB - [AB]$ est le lieu géométrique des points desquels le segment $[AB]$ est vu sous un angle de 0°. Nous voulons comprendre quel est le lieu géométrique des points d'où l'on voit un segment donné sous un angle donné, différent d'un angle nul ou plat.

Théorème 2.1. **de l'arc capable.** *Soient* $[AB]$ *un segment et* $0° < \alpha < 180°$. *Le lieu géométrique des points d'où l'on voit le segment* $[AB]$ *sous l'angle* α *est la réunion de deux arcs de cercle d'extrémités* A *et* B *sans les points* A *et* B, *et ces deux arcs sont symétriques l'un de l'autre sous la réflexion* AB.

Définition 2.2. Les deux arcs de cercle d'où l'on voit un segment $[AB]$ sous un angle $0° < \alpha < 180°$ sont appelés *arcs capables* d'angle α sur $[AB]$. On dit aussi *double arc capable* pour parler de la réunion des deux arcs.

Démonstration. Nous allons construire le double arc capable et montrer que les points des deux arcs possèdent la propriété attendue. Dans la série nous montrerons qu'aucun autre point ne vérifie cette propriété, ce qui conclura la preuve. Nous commençons par effectuer une construction :

(1) Construire la médiatrice m de $[AB]$.

(2) Construire un angle BAa de mesure $|90° - \alpha|$. La droite a coupe m en O_1.

(3) Construire le symétrique O_2 de O_1 sous la symétrie d'axe AB.

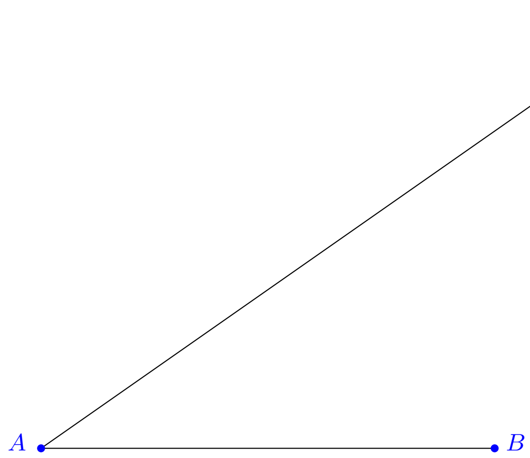
(4) Tracer les cercles $c_1(O_1; \overline{O_1A})$ et $c_2(O_2; \overline{O_2A})$. Ces cercles passent par A et B.

(5) Si $\alpha = 90°$, alors $O_1 = O_2$ et $c_1 = c_2$ est le lieu géométrique cherché. Sinon, on a deux cas, lorsque $0° < \alpha < 90°$ et lorsque $90° < \alpha < 180°$.

    <u>Premier cas</u> : les arcs $\widehat{AB}$, sans A et B, sur c_1 du même côté de AB que O_1 et sur c_2 du même côté de AB que O_2 sont la solution du problème.

    <u>Deuxième cas</u> : les arcs $\widehat{AB}$, sans A et B, sur c_1 de l'autre côté de AB que O_1 et sur c_2 de l'autre côté de AB que O_2 sont la solution du problème.

Prouvons que cette construction est correcte (nous utilisons les notations de la construction). Il faut montrer que tous les points du double-arc vérifient la condition du lieu et que tout point du plan qui vérifie la condition du lieu est sur le double-arc. La deuxième partie de la preuve est en exercice dans la série.



Notons d'abord que comme $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 180°$, la droite a n'est pas parallèle à m. Le point O_1 est donc bien défini. De plus, A est clairement sur c_1 (et donc sur son symétrique c_2). B est sur c_1 car O_1 est sur la médiatrice de $[AB]$ et donc à équidistance de A et B. Donc B est aussi sur le symétrique c_2 de c_1.

Considérons maintenant le cas $0° < \alpha < 90°$. Dans ce cas, $|90° - \alpha| = 90° - \alpha$. Nous prouvons que tous les points de l'arc $\widehat{AB}$ sur c_1 du même côté de AB que O_1, sans A et B, vérifient la condition du lieu.

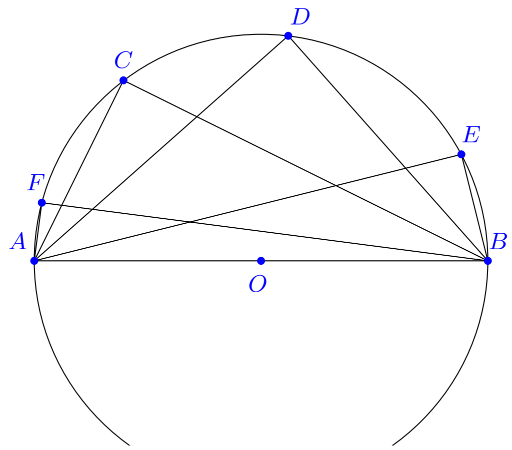
Considérons enfin le cas $90° < \alpha$. Dans ce cas, on a fait la construction des cercles c_1 et c_2 pour un angle BAa de mesure $|90° - \alpha| = \alpha - 90°$. Or

$$\alpha - 90° = 90° - (180 - \alpha).$$

On est donc dans le cas précédent, mais avec un angle de départ de mesure $180° - \alpha$. L'angle-plan $\widehat{AO_1B}$ mesure donc, par le raisonnement précédent, $2(180° - \alpha) = 360° - 2\alpha$. Son angle-plan rentrant mesure donc 2α. Or, tous les points de l'arc $\widehat{AB}$ sur c_1 sans A et B de l'autre côté de AB que O_1 interceptent le même arc que l'angle rentrant. On conclut en utilisant le Théorème de l'angle inscrit.

Nous avons donc montré que tous les points du double arc capable voient le segment $[AB]$ sous un angle α. Pour terminer la démonstration il reste à voir que seuls ces points vérifient cette propriété, c'est-à-dire que les points se trouvant hors du double arc voient le segment $[AB]$ sous un autre angle que α. □

Dans le cas où $\alpha = 90°$, les centres O_1 et O_2 coïncident avec le milieu du segment $[AB]$ puisque l'angle construit BAa est de mesure nulle. Ainsi les cercles c_1 et c_2 sont confondus et ont $[AB]$ comme diamètre. Le Théorème de l'angle inscrit garantit que tous les points du cercle, sauf les extrémités du diamètre $[AB]$ voient ce segment sous un angle droit.



DÉFINITION 2.3. Ce cercle s'appelle de *cercle de Thalès* du segment $[AB]$. Ainsi, pour tous les points P de ce cercle, sauf A et B, et seulement pour ces points, le triangle ΔABP est rectangle en P.

3. Les tangentes à un cercle

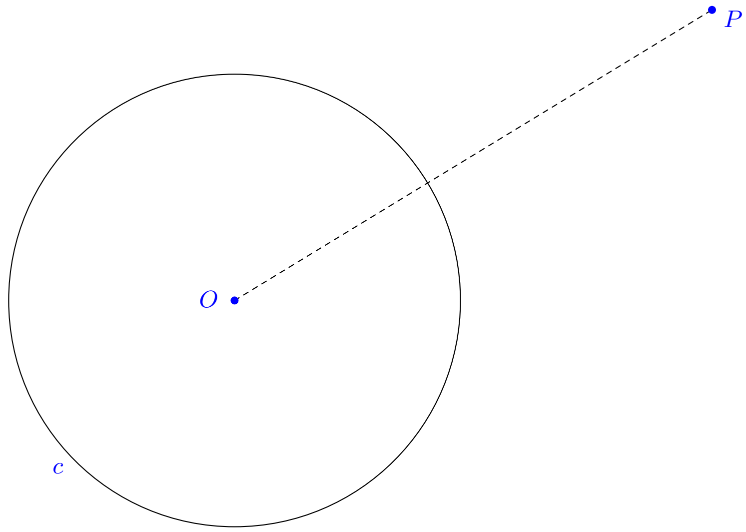
Le cercle de Thalès est un cas particulier de double arc capable. Nous allons maintenant utiliser ce cercle pour mieux comprendre la construction des tangentes à un cercle. Le problème que nous voulons résoudre est le suivant. On se donne un cercle et un point. On veut construire toutes les tangentes au cercle passant par ce point. Lorsque le point se trouve sur le cercle, la réponse est claire (et en exercice !).

PROPOSITION 3.1. *Par un point P d'un cercle c de rayon non nul passe exactement une tangente à c.*

Qu'en est-il lorsque le point P est à l'extérieur de c ? Si c est de rayon nul, alors c'est facile. Il n'y a qu'une tangente, la droite PO. Dans le cas non dégénéré, l'idée est la suivante. Soit O le centre de c. Si t est tangente à c en T et passe par P, alors $\measuredangle OTP = 90°$. Par conséquent, T se trouve sur le cercle de Thalès du segment $[OP]$.

THÉORÈME 3.2. *Soit c un cercle de rayon non nul. Par un point P à l'extérieur de c passent exactement deux tangentes à c.*

DÉMONSTRATION. Soit c un cercle de centre O et rayon $r > 0$. Soit P un point à l'extérieur de c.



Soit T le point de tangence d'une tangente t à c passant par P. Alors le diamètre passant par T coupe t perpendiculairement en T par le corollaire sur les cercles et droites tangentes. Par conséquent, le segment $[OP]$ est vu d'un angle de 90° du point T et donc le point T est sur le cercle de Thalès c' de $[OP]$.

Inversement, supposons que T soit un point d'intersection de c et c'. Alors le diamètre en T coupe TP perpendiculairement. Donc T est la projection de O sur TP et ainsi $d(O, TP) = r$. Par le même corollaire, la droite TP est tangente à c.

Nous allons prouver maintenant que ces deux cercles ont deux points d'intersection et qu'il y a par conséquent exactement deux tangentes à c passant par P. Soient O' le centre de c' et r' son rayon. Par la caractérisation des cercles sécants, il suffit de vérifier que

$$|r - r'| < \overline{OO'} < r + r'$$

Or dans notre cas, $\overline{OO'} = r'$. Donc $r' - r < \overline{OO'} = r' < r + r'$ car $r > 0$. Puisque la valeur absolue $|r - r'|$ peut valoir $r' - r$, mais aussi $r - r'$, il reste à montrer que $r - r' < \overline{OO'}$. Mais $\overline{OP} > r$ puisque P, par hypothèse, est extérieur au cercle. Ainsi, $2r' > r$ et donc $\overline{OO'} = r' > r - r'$. □

Pour construire les deux tangentes à un cercle c passant par un point P hors de c, il faut donc procéder comme ceci.

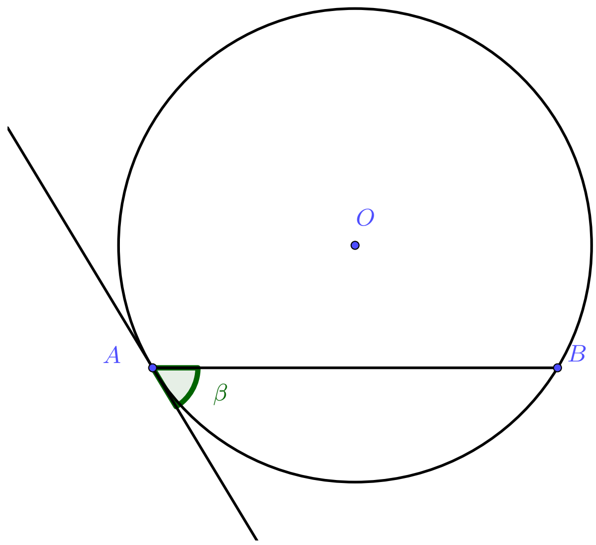
Marche-à-suivre :

(1) Construire le cercle de Thalès de $[OP]$. Il coupe c en deux points T et T'.

(2) Les droites TP et $T'P$ sont les tangentes cherchées.

Remarque 3.3. Nous en savons assez maintenant pour étendre le résultat sur l'arc capable au "cas limite" où l'observateur se trouve sur l'une des extrémités du segment $[AB]$. Lorsque l'on se trouve en un point P de l'un des arcs capables en s'approchant du point A, la demi-droite $[PB$ devient naturellement $[AB$ et la demi-droite $[PA$ quant à elle s'approche de la *tangente* à l'arc en A.

La question est donc de savoir quel angle forment ces deux demi-droites. Appelons β cet angle et considérons le triangle ΔOAB.



Comme le rayon $[OA]$ est perpendiculaire à la tangente l'angle en A vaut $90° - \beta$. Or, le triangle étant isocèle, l'angle au centre vaut 2β. Par le Théorème de l'angle inscrit l'angle de ce cas pathologique a la même mesure d'angle que tous les angles inscrits.

Chapitre 6

La notion d'aire et le Théorème de Pythagore

Nous allons maintenant étudier l'aire de figures du plan. Rappelons que pour les longueurs, nous avons défini la longueur des segments (la fonction distance). Il s'agit d'une notion fondamentale de la géométrie euclidienne : on doit supposer son existence et certaines de ses propriétés (axiomes de la distance). On a pu ensuite parler de longueur de figures plus complexes, les lignes polygonales, en sommant les longueurs des segments dont elles sont composées. On peut aussi à partir de la notion de distance définir la longueur de ligne « courbes » telles que les cercles, mais cela est plus difficile.

1. L'aire des polygones convexes

On procède de la même manière pour les aires. On commence par définir l'aire des surfaces élémentaires : les surfaces polygonales convexes. On ne peut pas déduire des axiomes l'existence ni les propriétés de cette aire. C'est une *notion fondamentale.* On suppose donc qu'une mesure d'aire des surfaces polygonales convexes vérifiant certaines propriétés fondamentales existe. Ceci permet ensuite de définir l'aire de figures plus complexes, comme les surfaces polygonales simples ou les disques...

Axiome 1.1. **de l'aire.** On suppose donnée une fonction

$$A\colon \{\text{surfaces polygonales convexes}\} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \text{telle que}$$

(1) **Axiome d'invariance.** Deux surfaces polygonales convexes isométriques ont la même aire.

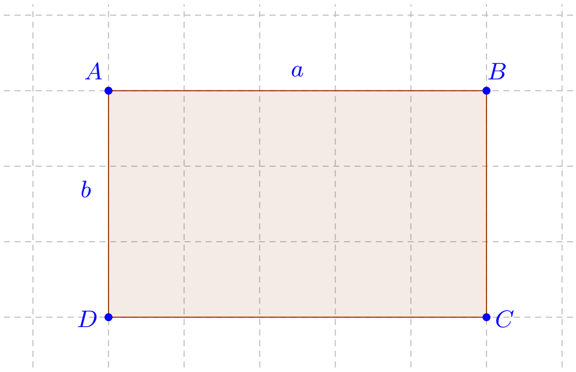
(2) **Axiome de découpage.** Lorsqu'une surface polygonale convexe est la réunion de deux surfaces polygonales convexes sans points intérieurs communs, son aire est la somme des aires des deux surfaces.

(3) **Axiome de normalisation.** L'aire du carré de côté 1 vaut 1.

Si on a une fonction d'aire A qui ne vérifie pas la troisième condition (de normalisation), alors, vu que l'aire $A(F)$ d'un carré F de longueur 1 est non nulle, on peut normaliser la fonction d'aire en posant $A' = A/A(F)$. En effet, si A vérifie les deux premiers axiomes de l'aire, alors A' aussi.

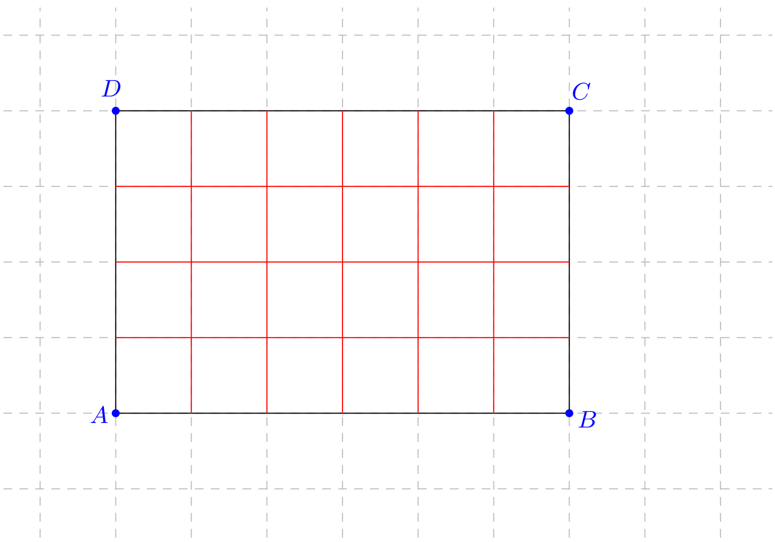
Définition 1.2. On appelle *dimensions* d'un rectangle les longueurs des deux côtés issus d'un même sommet de ce rectangle.

Dans cet exemple nous avons appelé a et b les longueurs des côtés issus de A :



La formule de l'aire d'un rectangle est une conséquence des axiomes de l'aire. Pour un rectangle dont les dimensions sont des nombres entiers, c'est facile à voir, mais la preuve générale est difficile !

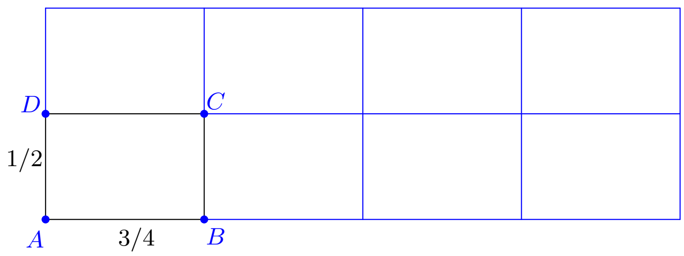
Voici par exemple un rectangle dont les côtés mesurent 4 et 6. On le découpe en petits carrés unité :



Ce raisonnement démontre en fait le lemme suivant.

Lemme 1.3. *L'aire d'un rectangle dont les côtés sont entiers égale le produit de ses dimensions.*

Voici ensuite un rectangle $ABCD$ dont les côtés mesurent $1/2$ et $3/4$. Pour calculer son aire on ajoute des rectangles isométriques de sorte à former un rectangle de côtés 1 et 3, découpé en $2 \cdot 4$ rectangles.



Ce raisonnement permet de montrer le deuxième lemme :

Lemme 1.4. *L'aire d'un rectangle dont les côtés sont rationnels égale le produit de ses dimensions.*

La preuve pour des côtés arbitraires, c'est-à-dire des nombres réels, mais pas nécessairement rationnels, fait appel à la notion de limite. Il faudrait approximer le rectangle par des rectangles rationnels de plus en proches du rectangle qui nous intéresse. C'est le début de l'analyse que nous étudierons en deuxième année ! Le théorème dit que l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent a et b vaut $a \cdot b$.

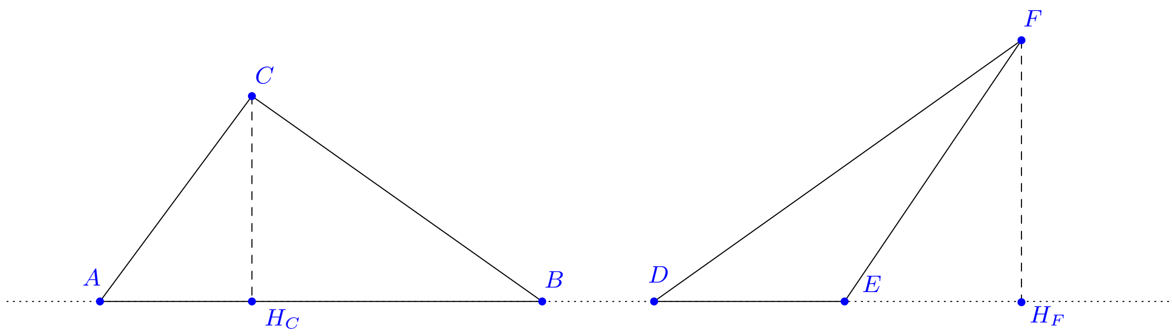
Théorème 1.5. *L'aire d'un rectangle égale le produit de ses dimensions.*

2. L'aire des triangles

Pour comprendre et apprivoiser la notion d'aire, nous devons comprendre comment calculer l'aire de certains polygones simples. On commence avec les triangles.

Définition 2.1. Etant donné un triangle ΔABC, la *base* d'une de ses hauteurs est le côté opposé au sommet dont elle est issue.

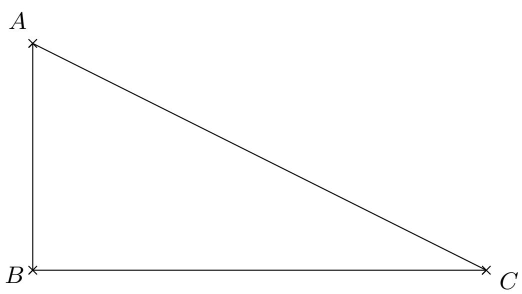
Par abus de langage, on parle de la longueur d'une hauteur pour celle du segment entre le sommet dont elle est issue et le point d'intersection de cette hauteur avec la droite supportant sa base. On voit ici deux triangles, l'un, ΔABC, dont le pied de la hauteur issue de C se trouve entre A et B, l'autre où il se trouve en dehors.



THÉORÈME 2.2. *L'aire d'un triangle est égale au produit d'une hauteur et de sa base divisé par* 2.

DÉMONSTRATION. Notons qu'il faut prouver ce résultat pour n'importe quelle hauteur d'un triangle. Sans restreindre la généralité et quitte à renommer les sommets du triangle on appelle A le sommet dont est issue la hauteur et H le pied de la hauteur sur BC. Afin de traiter tous les cas possibles, il faut considérer les trois situations suivantes : (1) la hauteur coïncide avec un côté (le triangle est rectangle), (2) le pied de la hauteur se trouve entre B et C, (3) le pied de la hauteur se trouve à l'extérieur du côté $[BC]$.

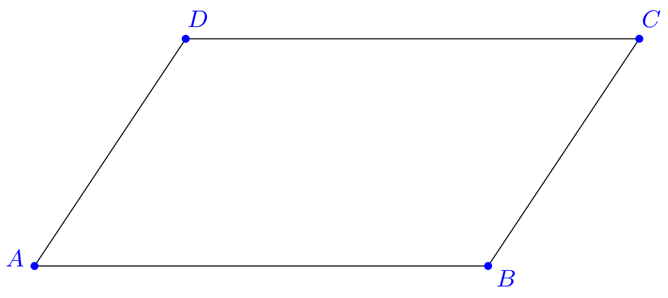
On va traiter le cas (1). Les autres cas se déduisent du cas (1), par addition ou soustraction, et seront traités dans la série.



3. L'aire de certains quadrilatères

Nous calculons rapidement les aires des parallélogrammes, des rhomboïdes et des trapèzes. Notre première formule peut s'interpréter comme suit : si on voit le parallélogramme comme un trapèze, son aire égale la base multipliée par la hauteur.

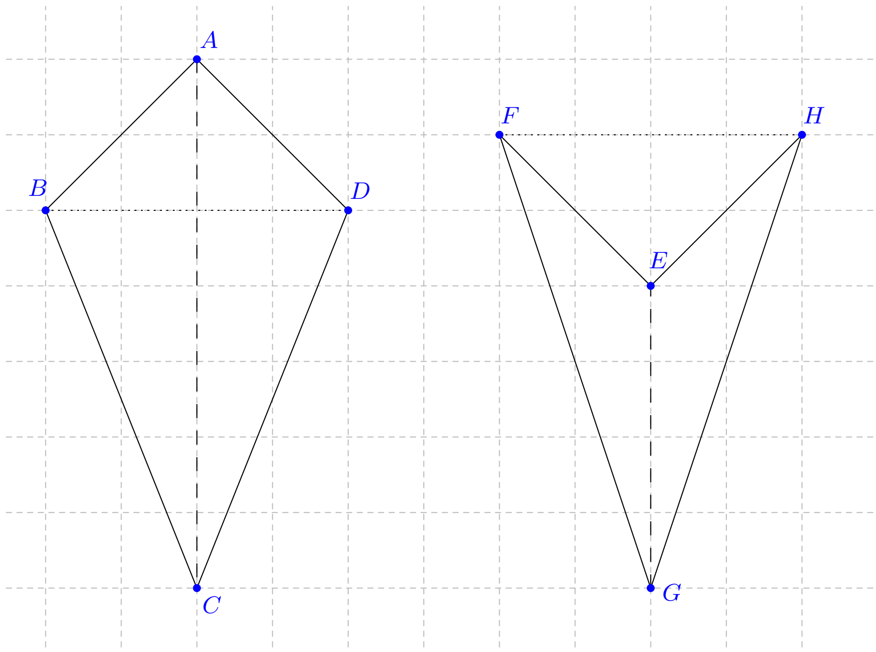
PROPOSITION 3.1. *L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de la longueur d'un côté par la distance de ce côté au côté opposé.*



On peut montrer que tout polygone simple, même s'il n'est pas convexe, est *triangulable* : on peut le recouvrir par un nombre fini de triangles d'intérieurs disjoints en utilisant les diagonales seulement. On définit alors l'aire de la surface polygonale comme la somme des aires des triangles (on peut montrer que cela ne dépend pas du choix de triangulation). Ceci étend la notion d'aire à l'ensemble des surfaces polygonales simples et cette aire est toujours invariante sous les isométries et « additive » sous la réunion de figures disjointes.

Cette remarque permet de passer maintenant au calcul de l'aire de tous les rhomboïdes : cerf-volants et fers-de-lance.

Proposition 3.2. *L'aire d'un rhomboïde est égale à la moitié du produit des longueurs de ses segments diagonaux.*

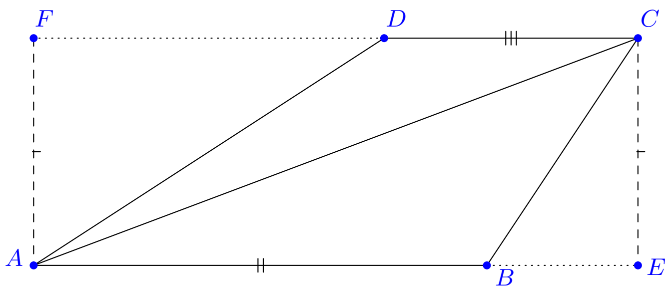


DÉMONSTRATION. Un rhomboïde étant symétrique par rapport à l'une de ses diagonales, il est la réunion de deux triangles isométriques d'intérieurs disjoints.

Nous terminons avec les trapèzes. Cette formule généralise celle des parallélogrammes.

PROPOSITION 3.3. *L'aire d'un trapèze convexe est le produit de la moyenne de ses bases et de sa hauteur.*

DÉMONSTRATION. Une diagonale d'un trapèze le divise en deux triangles d'intérieurs disjoints dont une hauteur a la longueur h, la hauteur du trapèze. Les bases respectives de ces deux hauteurs sont les deux bases du trapèze, ici $[AB]$ et $[CD]$:



Ainsi l'aire du trapèze est la somme des aires des triangles ΔABC et ΔCDA, qui vaut

$$\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CE} + \frac{1}{2}\overline{CD} \cdot \overline{AF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot h$$

$\square$

4. Le Théorème de Pythagore

Nous avons déjà démontré le Théorème de Pythagore (né vers -580 à Samos) lors de la première leçon du cours. Nous avions donné une preuve par découpage. La preuve d'aujourd'hui repose sur toutes nos connaissances de géométrie plane, y compris le Théorème de Pythagore "direct", et nous établirons la réciproque du théorème ! Rappelons que deux cercles $C(O; r)$ et $C'(O'; r')$ se coupent en deux points si et seulement si

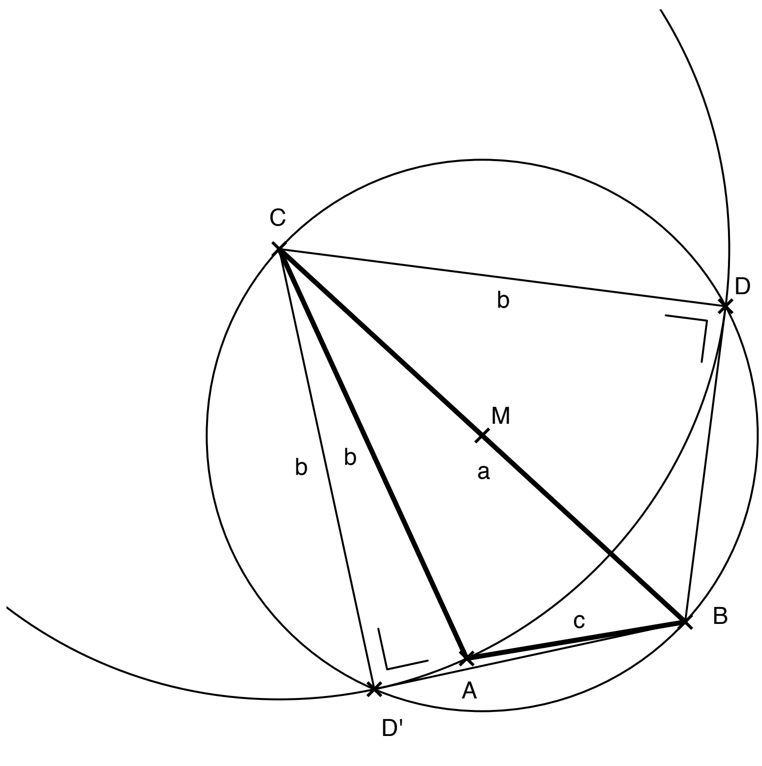
$$|r - r'| < \overline{OO'} < r + r'$$

Dans ce cas, la droite des centres est la médiatrice des points d'intersection.

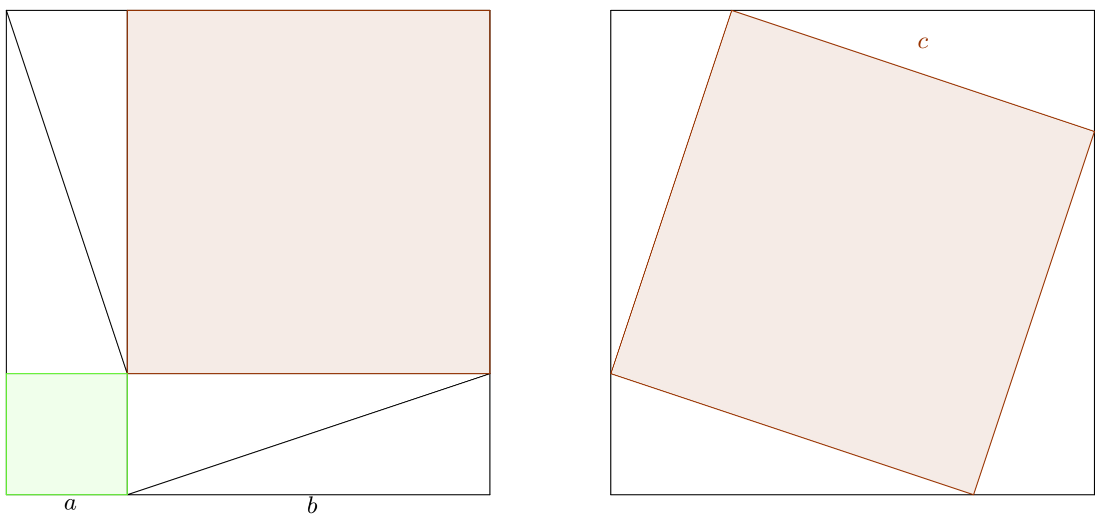
THÉORÈME 4.1. **de Pythagore.** *Un triangle ΔABC de côtés a, b et c opposés respectivement à A, B et C est rectangle en A si et seulement si les longueurs des côtés vérifient*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

DÉMONSTRATION. Soit ΔABC un triangle de côtés a, b et c opposés respectivement à A, B et C. Supposons que $a^2 = b^2 + c^2$. Pour montrer que ABC est rectangle en A on va montrer que A est sur le cercle de Thalès c_1 du segment $[BC]$.



Remarque 4.2. Cela vaut peut-être la peine de revoir la preuve du Théorème de Pythagore direct et comprendre tout ce qui nous avait échappé lors de la première démonstration ! Soit donc ΔABC un triangle rectangle en C. Nous allons démontrer par découpage que $c^2 = a^2 + b^2$. On considère un carré de côté $a+b$ que l'on découpe de deux manières différentes :



Dans le premier cas on place dans un coin un carré de côté a et dans le coin opposé un carré de côté b. On fait apparaître ainsi deux rectangles de côtés a et b. En traçant une diagonale dans chacun d'eux on crée quatre triangles isométriques au triangle ΔABC de départ. En effet chacun de ces triangles est rectangle et les cathètes mesurent a et b si bien que le deuxième cas d'isométrie des triangles permet de conclure. Si l'aire de ce triangle vaut S, on voit donc que l'aire du grand carré est égale à

$$a^2 + b^2 + 4 \cdot S$$

Dans le deuxième cas on découpe chaque côté du grand carré en deux segments de longueur a et b de sorte à faire apparaître quatre triangles isométriques au triangle ΔABC de départ dans les coins du grand carré. La raison en est la même que ci-dessus. De cette façon on crée un quadrilatère à l'intérieur. Observons que chaque côté de ce quadrilatère mesure c, l'hypoténuse. De plus chacun des angles est droit car supplémentaire à la somme des deux angles aigus du triangle ΔABC (Théorème de la somme des angles !). Ainsi ce quadrilatère est un carré de côté c et l'aire du grand carré peut aussi se calculer comme

$$c^2 + 4 \cdot S$$

On en déduit que $a^2 + b^2 + 4 \cdot S = c^2 + 4 \cdot S$. Soustrayons $4 \cdot S$ de chaque côté de cette égalité et nous avons démontré le théorème.

Chapitre 7

Le Théorème de Thalès

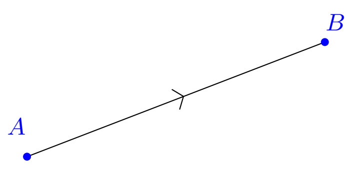
Nous étudions ici les rapports de section et notre but dans ce chapitre est de démontrer le Théorème de Thalès. Ceci nous permettra de comprendre en particulier comment construire, à la règle et au compas, un point qui divise un segment orienté dans une proportion donnée. La suite du programme de géométrie plane concernera les similitudes et les notions que nous allons découvrir nous permettront de comparer des triangles non pas isométriques, mais "semblables".

1. Rapport de section

Lorsque deux points sont donnés dans le plan nous savons construire le milieu du segment, mais comment construire un point qui se trouve 3 fois plus loin du premier point que du deuxième ? Comment décrire la position relative d'un point par rapport à un segment ? C'est le sujet de cette section de répondre à ces questions.

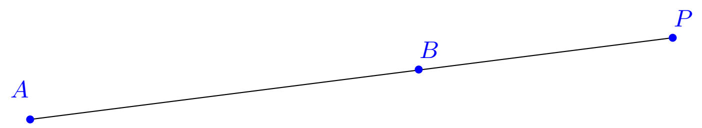
Définition 1.1. Un *segment orienté* est un segment $[AB]$ muni d'un ordre sur ses sommets.

Un segment $[AB]$ donné détermine toujours deux segments orientés selon que l'on choisisse A comme *origine* et B comme *extrémité* ou vice-versa. On peut se le représenter comme un segment décoré d'une petite flèche qui indique l'orientation :



Définition 1.2. Une *section* est la donnée d'un segment orienté d'origine A et d'extrémité B, et d'un point P situé sur la droite portant ce segment. On note (AB, P) cette section.

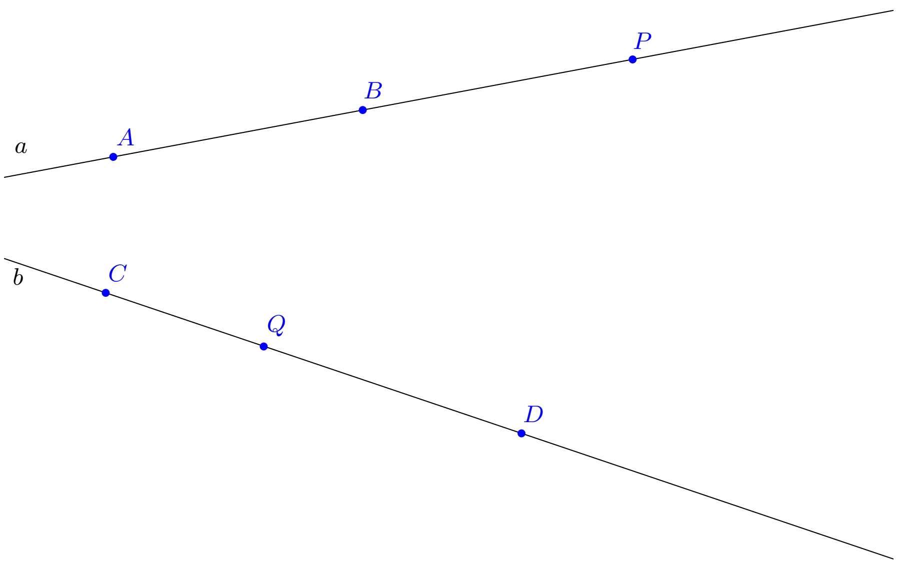
Voici un exemple de section :



Définition 1.3. Le *rapport de section*, ou parfois simplement le *rapport*, d'une section (AB, P), noté $r(AB, P)$, est le nombre réel défini ainsi :

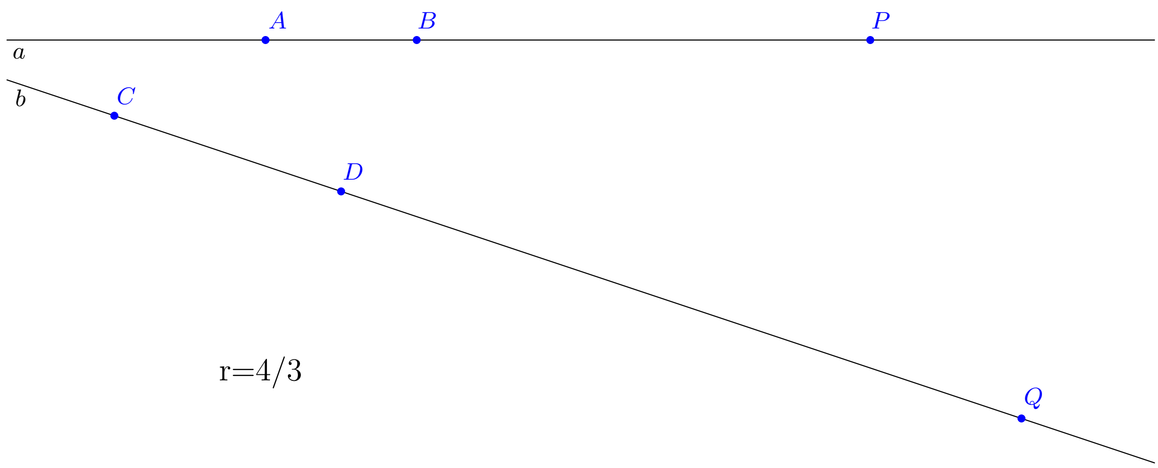
- Si $P \neq B$, alors
  — sa valeur absolue vaut $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$,
  — son signe est négatif si P appartient au segment $[AB]$, positif sinon.
- Si $P = B$, on introduit un *symbole* ∞, et on pose que le rapport est égal à ∞.

Exemple 1.4. On voit sur l'illustration suivante une section (AB, P) et une section (CD, Q). Que valent (approximativement) les rapports de ces sections ?



Il y a deux cas dits "pathologiques". Lorsque $P = A$, le rapport est nul, et lorsque $P = B$ le rapport est "infini".

Définition 1.5. Deux sections sont *semblables* si elles ont le même rapport.



Remarque 1.6. Lorsque deux sections (AB, P) et (CD, Q) sont semblables avec PA et PB, alors si l'on permute arbitrairement les points de la première section et que l'on permute de la même manière les points de la deuxième, on obtient toujours des sections semblables. Par exemple, les sections (AP, B) et (CQ, D) sont semblables.

La proposition suivante montre que le rapport de section permet de paramétriser tous les points de la droite AB.

Proposition 1.7. *Soit $[AB]$ un segment. Etant donné $r \in (\mathbb{R} - \{1\}) \cup \{\infty\}$, il existe un unique point P de la droite AB tel que le rapport de section (AB, P) est égal à r et tout point P de la droite AB détermine un tel r. Autrement dit, la fonction*

$$r(AB, -)\colon AB \to \mathbb{R} - \{1\} \cup \{\infty\}$$

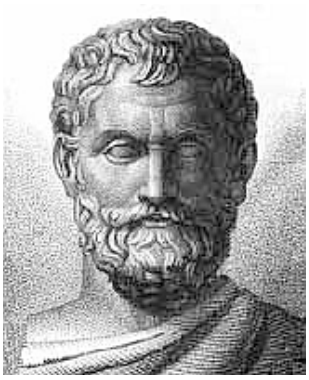
est une bijection.

En d'autres termes, cette proposition dit que le rapport de section (AB, P) détermine de manière unique le point P : Un point P de la droite AB détermine un rapport de section et un rapport de section détermine un point, pour autant qu'il soit différent de 1. En effet un rapport égal à 1 signifierait que les longueurs $|AP|$ et $|BP|$ sont égales, ce qui n'est possible que si P se trouve entre A et B, auquel cas le rapport est négatif.

Nous n'allons pas montrer l'injectivité (la preuve est un peu technique sans être très difficile). La suite de ce cours va démontrer la surjectivité.

2. Le Théorème de Thalès

REMARQUE 2.1. **Un peu d'histoire.** Thalès était un philosophe, né probablement à Milet, un port grec d'Asie Mineure (aujourd'hui en Turquie), vers 625 av. J.-C. et mort vers 547 av. J.-C. peut-être par déshydratation lors de la 58-ème Olympiade. On lui attribue le premier cas d'isométrie des triangles, mais pas le théorème qui porte son nom ! Par contre il voyagea en Egypte et une anecdote rapporte qu'il calcula sur la base de la longueur de son ombre la hauteur de la Grande Pyramide de Khéops que le Pharaon Amasis aurait déclaré incalculable. Impressionnés par ce calcul, les prêtres lui donnèrent accès à la bibliothèque où il put consulter de nombreux ouvrages d'astronomie.



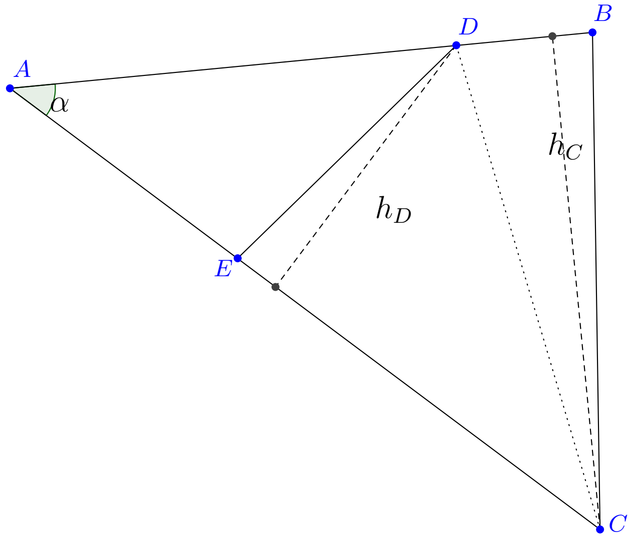
Thalès de Millet, www.urban-astronomer.com

Avant de passer au Théorème de Thalès, nous avons besoin du résultat suivant qui permet de comparer les aires de deux triangles qui partagent un angle isométrique.

LEMME 2.2. *Soit ΔABC et $\Delta A'B'C'$ deux triangles. Si $\alpha = \alpha'$, alors*

$$\boxed{\frac{Aire(\Delta ABC)}{Aire(\Delta A'B'C')} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{A'B'} \cdot \overline{A'C'}}}$$

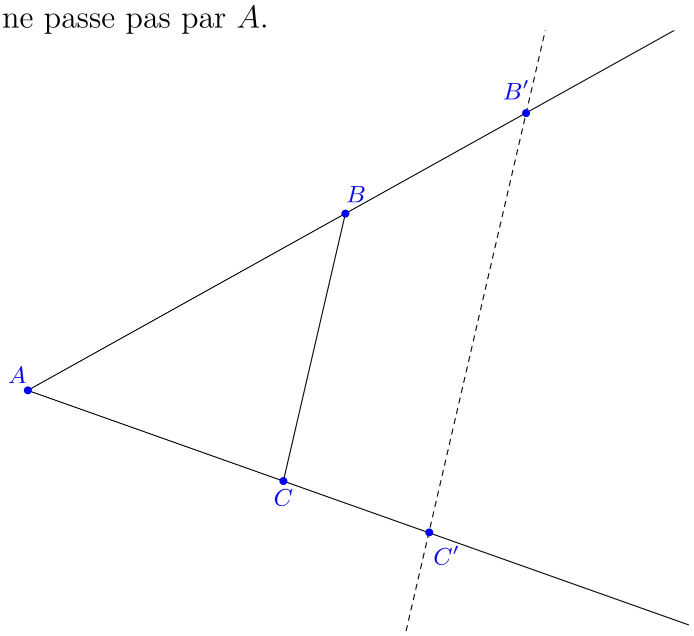
DÉMONSTRATION. Il s'agit d'une simple application du calcul de l'aire d'un triangle (la moitié de la base fois la hauteur). Pour pouvoir comparer les triangles de manière plus commode, nous reportons sur la demi-droite $[AB$ le segment $[A'B']$ et sur $[AC$ le segment $[A'C']$. Appelons D et E les points ainsi construits. L'idée sera ensuite d'introduire l'aire d'un triangle auxiliaire ΔADC.



THÉORÈME 2.3. **de Thalès.** *Soit d une droite parallèle au côté $[BC]$ d'un triangle ΔABC, coupant les droites AB et AC en B' et C' respectivement. Alors les rapports des sections (BB', A) et (CC', A) sont égaux.*

Démonstration. Notons que les droites AB et AC coupent la droite BC (car le triangle n'est pas dégénéré) et donc coupent toute parallèle à BC. L'énoncé fait donc sens.

Traitons d'abord le cas particulier lorsque la droite d passe par A. Dans ce cas trivial, A doit donc être le point d'intersection de d et de AB d'une part, et le point d'intersection de d et de AC d'autre part. Donc $C' = B' = A$. Dans ce cas, les rapports des sections (BB', A) et (CC', A) sont égaux car ils valent ∞. Supposons maintenant que d ne passe pas par A.



Remarquons d'abord que sous les hypothèses du théorème, les signes des rapports sont les mêmes. En effet, B et C se trouvent du même côté de d (car d est parallèle à BC et on conclut par l'axiome des demi-plans). Ainsi, A appartient au segment $[BB']$ si et seulement si A appartient au segment $[CC']$.

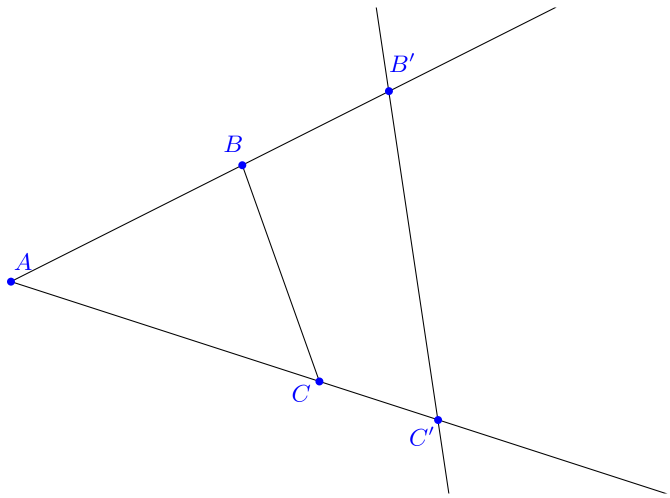
Remarque 2.4. Dans la situation du théorème, lorsque la droite d ne passe pas par A, on peut de plus montrer que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

La réciproque de ce théorème est aussi vraie !

Proposition 2.5. **Réciproque du Théorème de Thalès.** *Soit ΔABC un triangle et soit d une droite* ne passant pas par A, *coupant les droites AB et AC en B' et C' respectivement. Si les rapports des sections (BB', A) et (CC', A) sont égaux, alors la droite d est parallèle à la droite BC.*

Démonstration. Les points B et B' n'étant pas confondus, nous pouvons mener la parallèle p à BC passant par B'.



Un nombre réel détermine un unique point sur la droite AC dont le rapport de section a cette valeur. Ce point D doit donc être confondu avec C'. □

3. Construction de rapports de section

Nous sommes enfin à même de reporter des rapports de sections et de construire des rapports.

Problème 1. Etant donnés une section (AB, P) et un segment $[A'B']$, construire un point P' de sorte que les rapports des sections (AB, P) et $(A'B', P')$ soient égaux.

Marche à suivre.

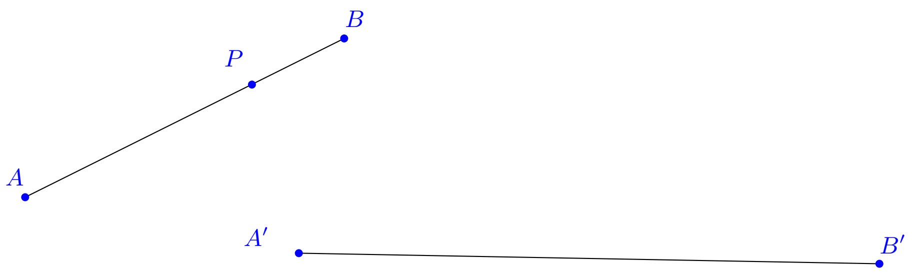
(1) Tracer une droite d passant par A' qui ne supporte pas le segment $[A'B']$.

(2) Reporter (au compas) la section (AB, P) sur cette demi-droite. On obtient donc une section $(A'D, Q)$ sur $[A'd$ telle que $\overline{A'D} = \overline{AB}$ et $\overline{A'Q} = \overline{AP}$.

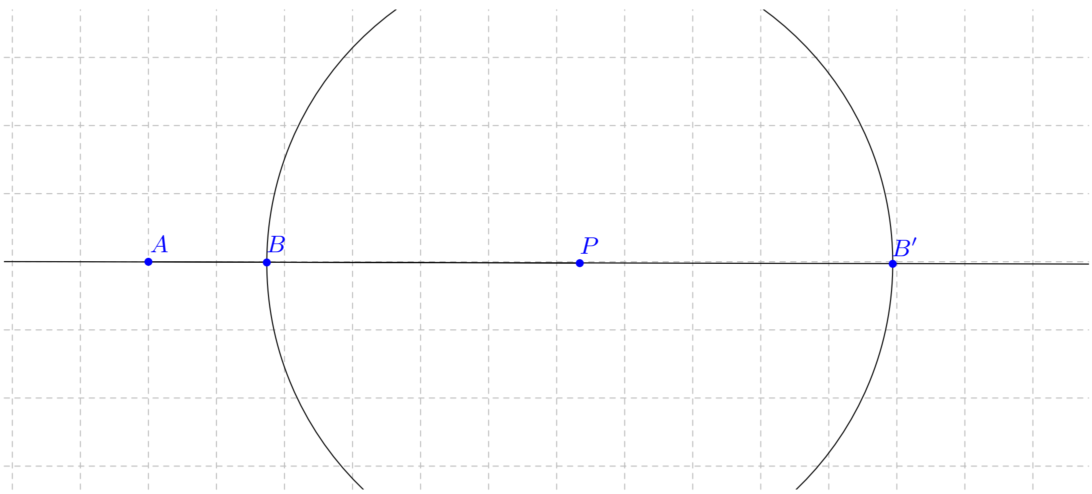
(3) Tracer la droite $B'D$ et mener la paralléle p passant par Q.

(4) Le point P' cherché se trouve à l'intersection de p et de $A'B'$.

La justification est donnée par le Théorème de Thalès.



Problème 2. *Etant donnés un rapport $r \in \mathbb{R} - \{1\} \cup \{\infty\}$, construire une section (AB, P) de sorte que le rapport de section de (AB, P) soit égal à r.*



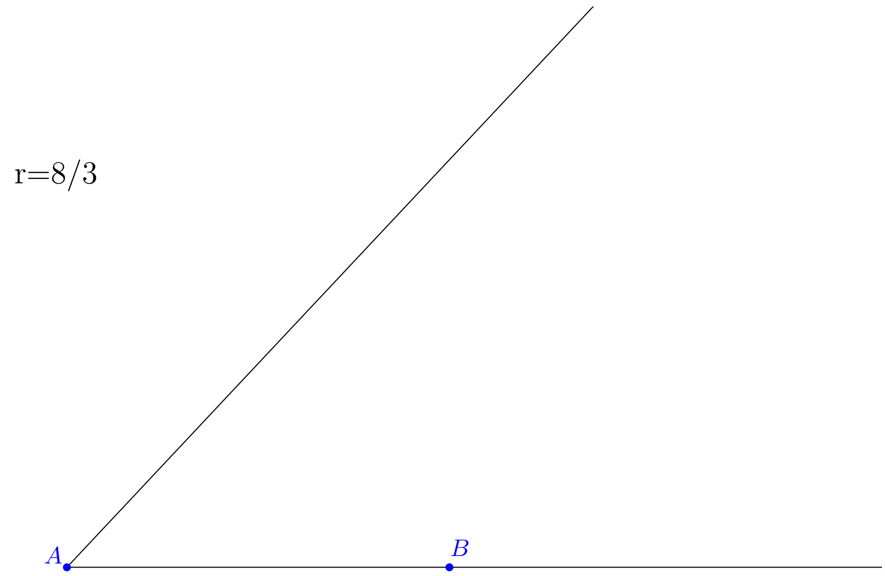
Si $r = 0$, alors $P = A$. Si $r = \infty$, alors $P = B$. Supposons donc que $r \neq \infty$. L'idée est de construire une section (AB, P) où $\overline{AP} = |r|$ et $\overline{BP} = 1$. Il ne restera alors qu'à bien choisir la position relative des points A, B et P pour que le rapport de section ait le bon signe.

Par les axiomes de la distance, il existe un segment $[AP]$ de longueur $|r|$. On trace ensuite le cercle $\Gamma(P, 1)$ de centre P et de rayon 1. Celui-ci coupe la droite AP en deux points B et B'. On voit ci-dessus la situation où $|r| > 1$:

Il y a maintenant deux cas : Si $r > 0$, il faut choisir le point B sur la demi-droite $[PA$, le rapport de section est alors positif. Si $r < 0$, on choisit le point B', sur l'autre demi-droite d'extrémité P de sorte que P se trouve entre A et B' et le rapport de section est négatif.

On peut si nécessaire appliquer ensuite le problème 1 à un segment $[CD]$ donné et construire une section (CD, R) de rapport r. Notons que ceci démontre que l'application qui fait correspondre à toute section un nombre réel (ou l'infini) différent de 1 est surjective.

Remarque 3.1. On est parti d'un segment de longueur r pour résoudre le problème 2. Si on ne dispose que du segment de longueur 1, on peut construire toutes les sections de rapport rationnel. En effet, il suffit de reporter le segment de longueur 1 suffisamment de fois pour obtenir des sections de rapport rationnel quelconque. On applique alors la méthode du problème 1.



Chapitre 8

Les similitudes

La situation illustrée par le Théorème de Thalès nous conduit tout naturellement à étudier un nouveau type de transformation géométrique du plan, les similitudes. Nous verrons qu'en dehors des isométries qui sont des cas particuliers de similitudes, seule une nouvelle sorte de transformation fera son entrée en scène : l'homothétie. Notre but sera ensuite de comprendre les analogues pour les similitudes des trois cas d'isométrie des triangles.

1. Les homothéties

DÉFINITION 1.1. Une *similitude* est une transformation géométrique du plan qui modifie les distances sous un rapport constant non nul.

En d'autres termes, une transformation géométrique f est une similitude s'il existe un nombre réel positif non nul r tel que pour toute paire de points A et B,

$$d(f(A), f(B)) = r \cdot d(A, B).$$

Notons qu'une transformation géométrique est une isométrie si et seulement si c'est une similitude de rapport 1.

LEMME 1.2. *La composée de deux similitudes de rapport r et s respectivement est une similitude de rapport $r \cdot s$. De plus, toute similitude est injective.*

Voici d'abord un type de similitude très important.

DÉFINITION 1.3. Soit O un point du plan et $r \in \mathbb{R}^*$. L'*homothétie* de centre O et de rapport r est la transformation géométrique du plan $h(O,r)$ définie ainsi :

(1) Si $r = 1$, alors $h(O,r)$ est l'identité.

(2) Sinon, elle fixe le point O et transforme un point A différent de O en un point $A'A$ sur la droite OA de sorte que le rapport de la section $(A'A, O)$ soit r. En particulier,

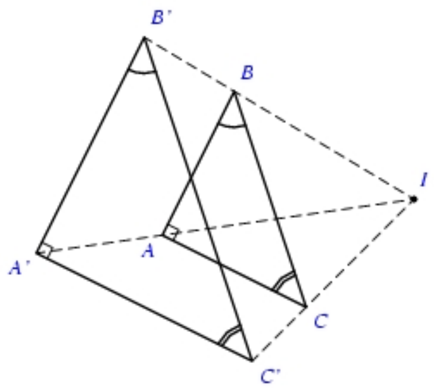
$$|r| = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

Par conséquent, si $h(O,r)$ est une homothétie avec $r \neq 1$ et que P' est l'image de P, alors

$$\overline{OP'} = |r| \cdot \overline{OP}.$$

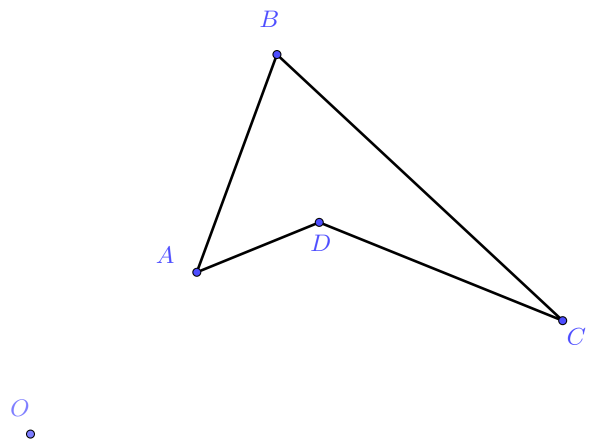
De plus, le seul point fixe de h est O. Le mot « homothétie » vient du grec bien sûr. Le préfixe "homo" signifie semblable et "thétie" vient du verbe placer. L'image par une homothétie d'une figure géométrique est ainsi une nouvelle figure placée de manière semblable dans le plan.

EXEMPLE 1.4. Nous voyons ici l'image d'un triangle ABC par une homothétie de centre I et de rapport $3/2$:



EXEMPLE 1.5. Une homothétie de centre O et de rapport -1 est une symétrie centrale de centre O.

EXEMPLE 1.6. Construisons ici les images du quadrilatère $ABDC$ par les homothéties de rapport 2 et $-\frac{1}{2}$.



PROPOSITION 1.7. *La composée de deux homothéties de même centre O est une homothétie de centre O. Plus précisément, $h(O,s) \circ h(O,r) = h(O,sr)$.*

DÉMONSTRATION. Notons $h = h(O,r)$ et $h' = h(O,s)$. Vérifions que $h' \circ h$ est l'homothétie de centre O et de rapport $r \cdot s$. Premièrement, $h' \circ h$ fixe le point O car

$$(h' \circ h)(O) = h'(h(O)) = h'(O) = O.$$

Soit maintenant PO et notons $P' = h(P)$, $P'' = h'(P') = (h' \circ h)(P)$. Alors P'' est sur la droite OP. En effet, P'' est sur la droite OP'. Or, puisque P' est sur la droite OP, $OP' = OP$. De plus, $\overline{OP''} = |s| \cdot \overline{OP'} = |s \cdot r| \cdot \overline{OP}$.

Considérons d'abord le cas où $s = \frac{1}{r}$. On a alors que $\overline{OP''} = \overline{OP}$ par ce qui précède. De plus, P'' est sur la droite OP. Comme r et s doivent avoir le même signe, P'' se trouve du même côté de O que P. Ainsi, $P'' = P$.

Considérons maintenant le cas où $s \neq \frac{1}{r}$. Alors $P'' \neq P$ car $\overline{OP''} = |s \cdot r| \cdot \overline{OP}$ et $s \cdot r \neq 1$. Il reste donc à montrer que $r(P''P, O) = r \cdot s$.

Ces deux nombres ont le même signe. Considérons la droite OP, déterminant deux demi-droites d'extrémité O, dont l'une contient P. Le nombre rs est positif si et seulement si r et s sont de même signe, ce qui est le cas si et seulement si P'' se trouve dans la demi-droite $[OP$. Or cette dernière condition est équivalente à ce que $r(P''P, O)$ soit positif. Au final, rs est positif si et seulement si $r(P''P, O)$ est positif.

Pour conclure, comme $O \neq P$, on calcule

$$|r(P''P, O)| = \frac{\overline{OP''}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP''}}{\overline{OP'}} \cdot \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = |s| \cdot |r| = |s \cdot r|.$$

on constate qu'ils ont la même valeur absolue et donc qu'ils sont égaux. □

2. Propriétés des homothéties

Nous voulons maintenant comprendre plus précisément comment les homothéties transforment les objets du plan.

Remarque 2.1. On peut toujours ramener l'étude des homothéties à celles de rapport positif. Une homothétie négative est la composée d'une homothétie positive avec une symétrie centrale. En effet

$$h(O, r) = h(O, (-1) \cdot (-r)) = h(O, -1) \circ h(O, -r) = h(O, -r) \circ h(O, -1)$$

Proposition 2.2. *Toute homothétie est inversible. L'inverse de $h(O, r)$ est l'homothétie $h(O, \dfrac{1}{r})$.*

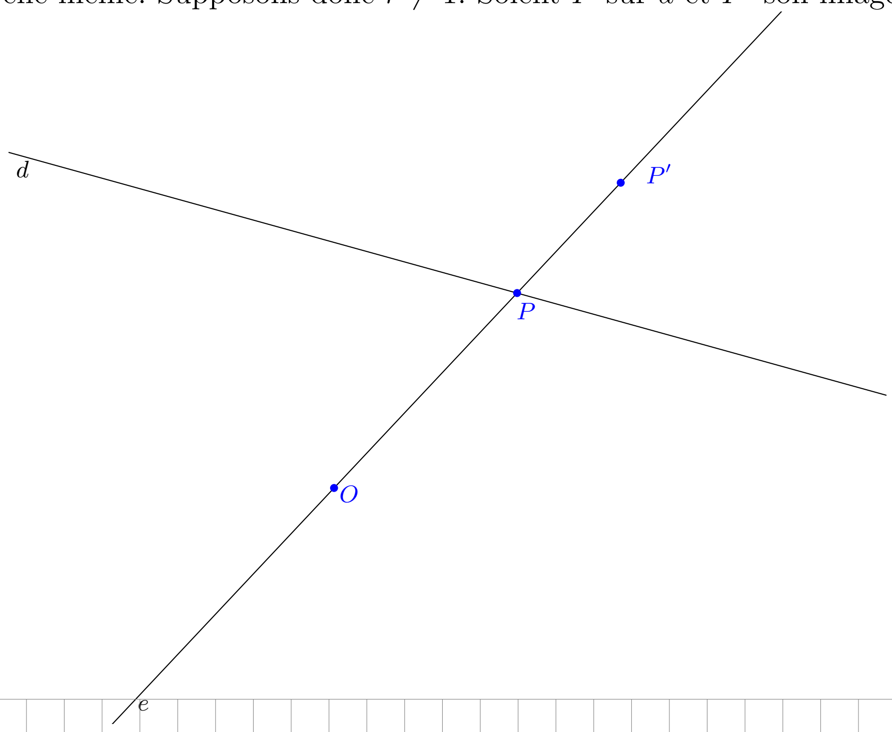
En particulier, les homothéties sont des bijections. De plus, les homothéties de centre O fixé forment un groupe pour la composition. Le groupe est abélien car $h(O, s) \circ h(O, r) = h(O, sr) = h(O, rs) = h(O, r) \circ h(O, s)$.

Proposition 2.3. *L'image, sous une homothétie $h(O, r)$, d'une droite passant par O est la droite elle-même. L'image d'une droite ne passant pas par O est une droite de même direction (parallèle si et seulement si $r \neq 1$).*

Démonstration. Notons $h = h(O, r)$. Supposons pour commencer que la droite e passe par O. Le point O est fixé par h. Soit maintenant PO sur e. Alors son image est aussi sur e puisque $e = OP$. Ainsi tous les points de e sont transformés en des points de e. Inversement, tout point P' de e est l'image d'un point P de cette même droite puisque $P = h(O, 1/r)(P')$ est un point de e et

$$P' = h(O, r)(P)$$

Supposons maintenant que d ne passe pas par O. Si $r = 1$, alors d est transformée en elle-même. Supposons donc $r \neq 1$. Soient P sur d et P' son image.



Réciproquement, montrons que tout point de p est l'image d'un point de d sous h. Soit $B' \neq P'$ un point de p. Il est l'image d'un point B sous h et on a donc $r(B'B, O) = r = r(P'P, O)$. De la même manière que précédemment, on en conclut par le théorème de Thalès réciproque que PB est parallèle à p. Donc $PB = d$ et $B \in d$. $\square$

Nous aurons besoin de la relation algébrique suivante. Si deux fractions $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sont équivalentes, alors on obtient aussi les fractions équivalentes suivantes :

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{c-a}{d-b} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

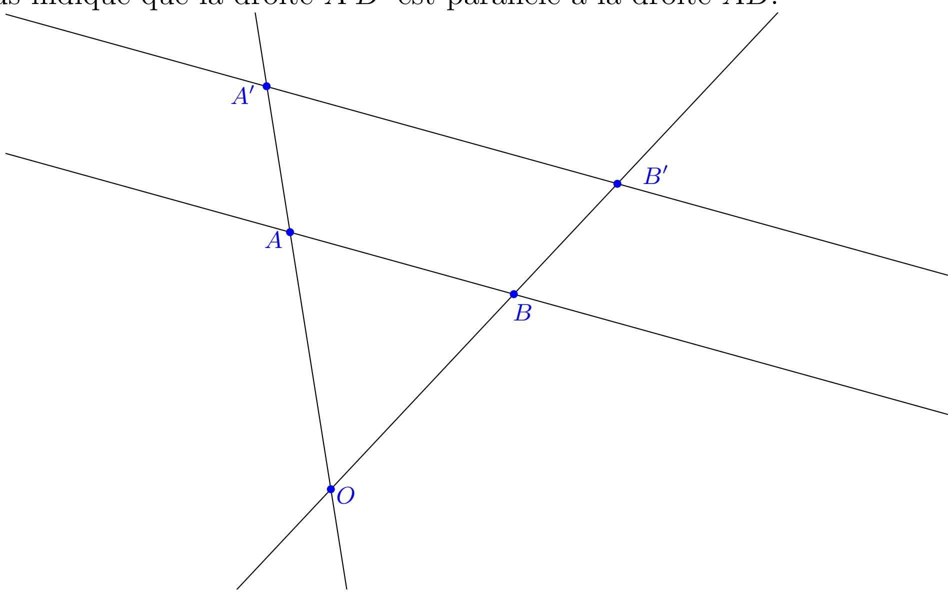
Montrons par exemple que $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$. En effet, $(a+c)\cdot b - (b+d)\cdot a = ab + cb - ba - da = 0$ car $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad - bc = 0$.

Proposition 2.4. *Une homothétie $h(O, r)$ est une similitude de rapport $|r|$.*

Démonstration. Notons h l'homothétie $h(O, r)$. Si $r = 1$, alors h est l'identité, qui est bien une similitude de rapport 1.

Supposons $r \neq 1$. Soient $A \neq B$ deux points du plan, A', B' leurs images sous h. Si l'un est égal à O, disons A, alors on sait déjà par le point 1 que $\overline{A'B'} = \overline{OB'} = |r| \cdot \overline{OB} = |r| \cdot \overline{AB}$. Considérons maintenant deux points A et B distincts de O. Il y a deux situations.

(1) Les points A et B ne sont pas alignés avec O. Dans ce cas, on a un triangle ΔOAB. On a $A' \neq B'$ vu qu'une homothétie est injective. La proposition précédente nous indique que la droite $A'B'$ est parallèle à la droite AB.



Par conséquent, le théorème de Thalès s'applique et nous donne :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = |r|.$$

Donc $\overline{A'B'} = |r| \cdot \overline{AB}$.

(2) Les points A et B sont alignés avec O. On sait que $|r| = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$.

Considérons maintenant différentes positions de O par rapport à A et B. Si $O \in [AB]$. Alors $O \in [A'B']$. Par le raisonnement algébrique que nous avons fait avant la proposition,

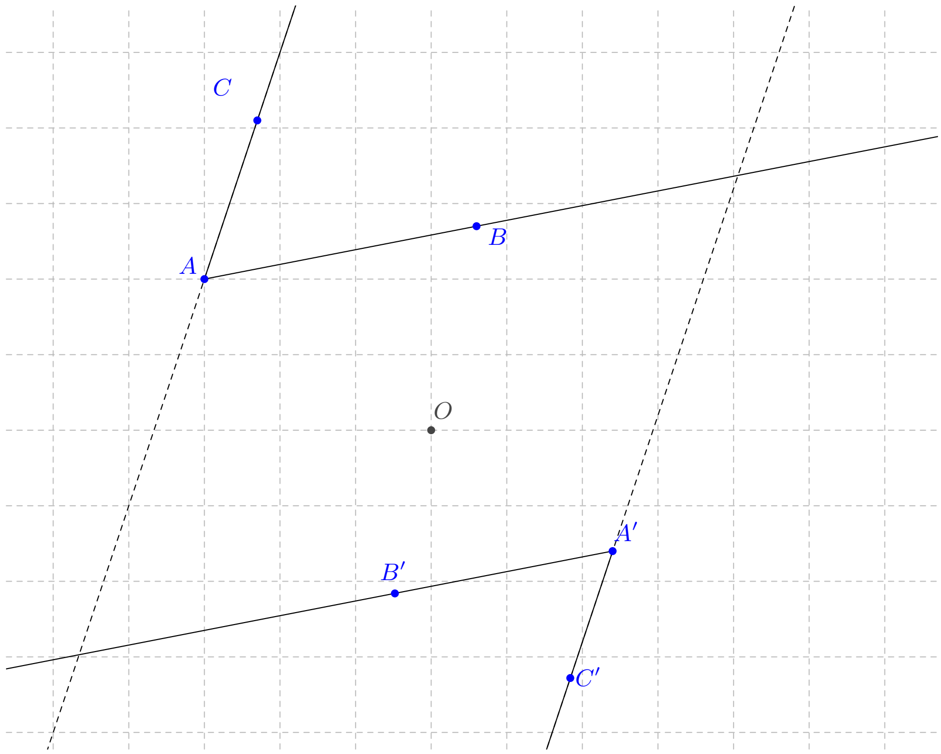
$$|r| = \frac{\overline{OA'} + \overline{OB'}}{\overline{OA} + \overline{OB}}$$

Comme $O \in [AB]$, $\overline{OA}+\overline{OB} = \overline{AB}$. De même pour A' et B'. Finalement, $|r| = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

Si $O \notin [AB$. Donc $O \notin [A'B'$. Par le même type de raisonnement, on obtient :

$$|r| = \frac{\overline{OB'} - \overline{OA'}}{\overline{OB} - \overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Si enfin $O \notin [BA$, le même type de raisonnement permet de conclure. $\square$



Remarque 2.5. Les homothéties préservent les rapports de sections. Par conséquent, elles préservent les segments, les demi-droites, les demi-plans (sans preuve). Enfin, l'image d'un angle-plan sous une homothétie est un angle-plan isométrique.

Nous avons vu en effet que l'image d'un angle est un angle dont les côtés sont respectivement parallèles (ou confondus) aux côtés du premier. On conclut alors en appliquant deux fois le théorème de la transversale.

3. Les trois cas de similitude des triangles

Nous sommes maintenant capables de donner une classification complète des similitudes.

THÉORÈME 3.1. *Une transformation géométrique du plan est une similitude si et seulement c'est la composée d'une isométrie avec une homothétie.*

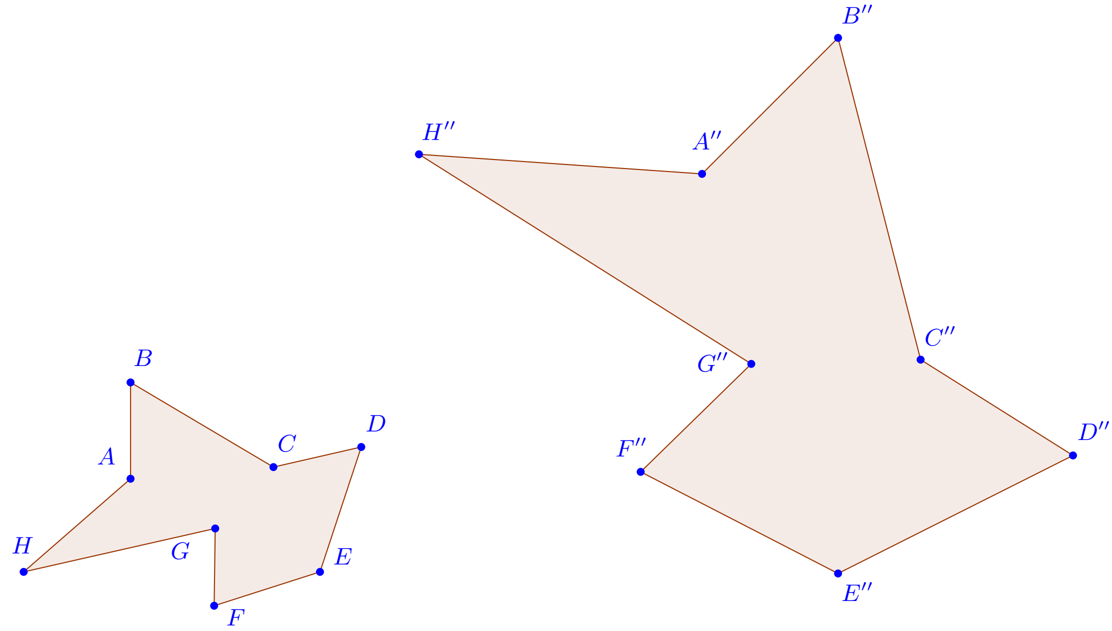
COROLLAIRE 3.2. *Toute similitude est inversible et les similitudes préservent les angles.*

DÉFINITION 3.3. Deux figures F et F' sont *semblables* s'il existe une similitude qui transforme F en F'. On note $F \sim F'$

Si $F \sim F'$, alors on a :

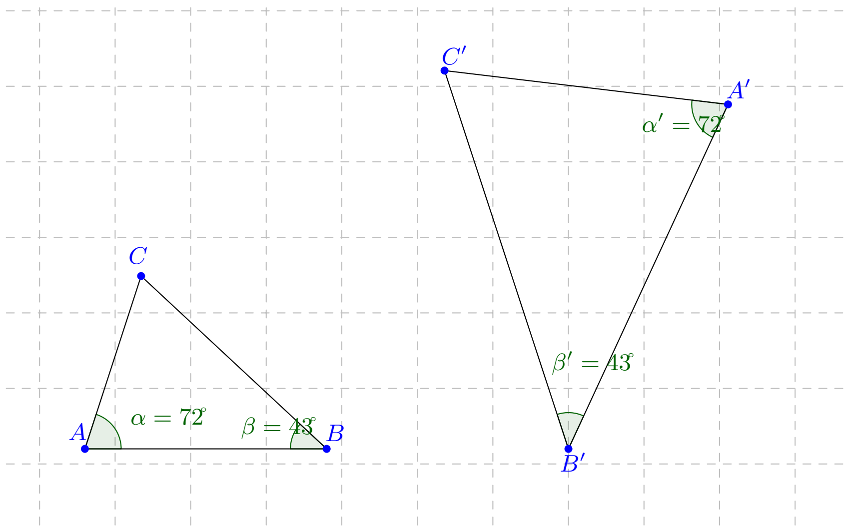
(1) Les distances des points de F' sont dans un rapport constant avec les distances des points correspondants de F ; ce rapport est le *rapport de similitude*.

(2) les angles correspondants de F et F' sont isométriques.



Nous énonçons maintenant trois cas de similitude des triangles, c'est-à-dire des relations entre des parties de deux triangles garantissant qu'il existe une similitude qui transforme l'un en l'autre. Les démonstrations se ressemblent beaucoup et nous n'en ferons qu'une. La démonstration du premier cas s'appuie sur le premier cas d'isométrie des triangles, celle du deuxième sur le deuxième cas d'isométrie, etc. On prouve le deuxième cas. Les autres sont en exercice !

Proposition 3.4. **Premier cas de similitude des triangles.** *Deux triangles sont semblables s'ils ont deux angles respectivement isométriques.*



PROPOSITION 3.5. **Deuxième cas de similitude des triangles.** *Deux triangles sont semblables s'ils ont un angle isométrique compris entre deux côtés proportionnels.*

PROPOSITION 3.6. **Troisième cas de similitude des triangles.** *Deux triangles sont semblables s'ils ont trois côtés proportionnels.*

Pour terminer disons encore un mot sur le rapport des aires de triangles semblables.

COROLLAIRE 3.7. *Soient ΔABC et $\Delta A'B'C'$ deux triangles semblables. Si le rapport de similitude vaut r, alors*

$$\frac{\text{Aire}(\Delta A'B'C')}{\text{Aire}(\Delta ABC)} = r^2$$

DÉMONSTRATION. C'est une application de la formule du rapport des aires de deux triangles qui ont un angle isométrique. Comme toute similitude préserve les angles nous savons que $\alpha = \alpha'$ et donc

$$\frac{\text{Aire}(\Delta A'B'C')}{\text{Aire}(\Delta ABC)} = \frac{\overline{A'B'}\;\overline{A'C'}}{\overline{AB}\;\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = r^2.$$

$\square$

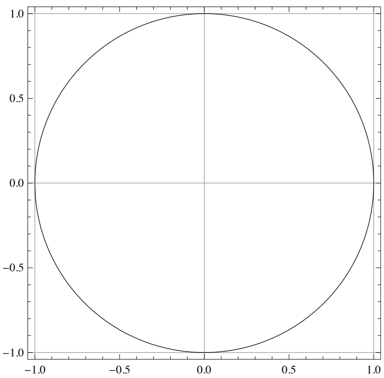
Chapitre 9

Le nombre π

Jusqu'à présent nous avons étudié la géométrie d'un point de vue axiomatique et nous avons développé des méthodes, des concepts et des constructions sur la base de quelques axiomes, inspirés de ceux d'Euclide d'il y a plus de 2000 ans. La trigonométrie (du grec $\tau\rho\iota\gamma\omega\varsigma$, "triangulaire", et $\mu\epsilon\tau\rho o\nu$, "mesure") est une branche des mathématiques qui traite des relations entre distances et angles dans les triangles. Il s'agit donc d'une manière plus cartésienne de représenter les objets de la géométrie plane. Par exemple nous verrons un angle comme une mesure effectuée sur un cercle au lieu de le voir comme l'union de deux demi-droites issues du même point. Pour fixer une unité de mesure, nous allons d'abord comparer l'aire d'un disque avec le périmètre d'un cercle de même rayon.

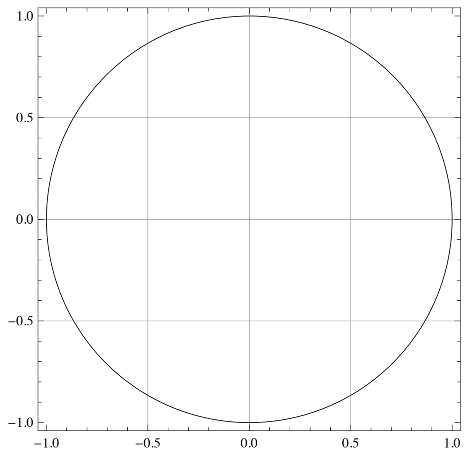
1. L'aire du disque

La notion d'aire a été introduite pour des triangles, puis pour des polygones, mais nous ne savons pas encore ce qu'est l'aire d'un disque. Nous allons voir un procédé qui peut s'appliquer à d'autres figures.

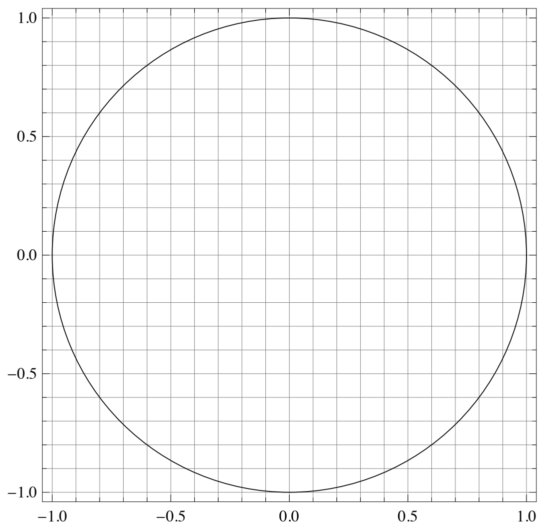


Considérons un disque de centre O et de rayon 1 comme ci-dessus. Si nous découpons le plan par un *réseau* dont les mailles sont des carrés de côté 1 (ce réseau est défini par les droites horizontales d'équation $y = n$ et les droites verticales d'équation $x = m$ pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$) :

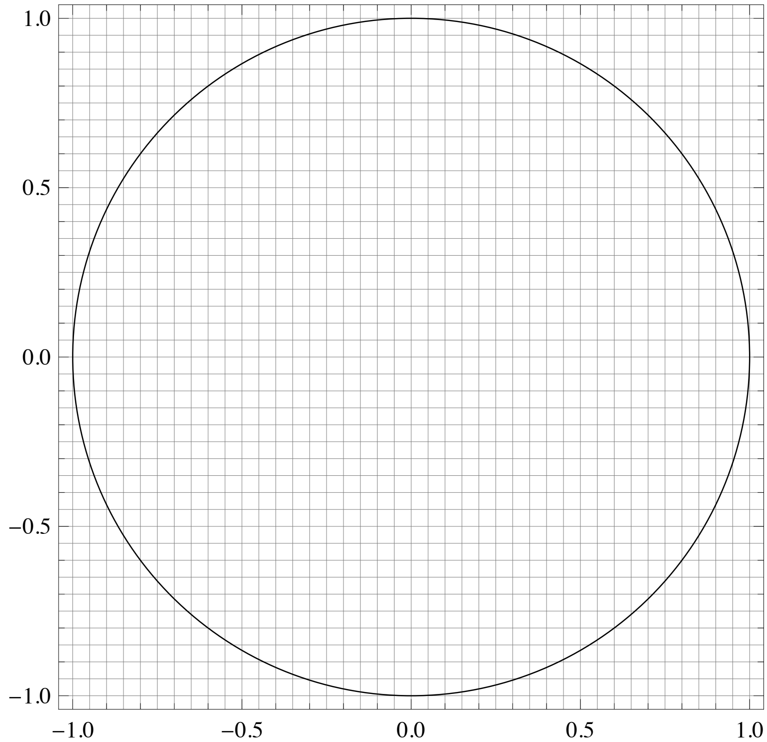
Comptons les mailles du réseau qui sont entièrement contenues dans le disque : il n'y en a pas. Comptons celles qui contiennent le disque : il y en a quatre. Ainsi la surface du disque est comprise en 0 et 4. Pour obtenir une meilleure approximation, nous utilisons un réseau deux fois plus fin, comme ceci :



Il y a quatre mailles contenues dans le disque, et 16 qui le contiennent. Chaque maille est un carré de côté $0,5$ dont la surface vaut $0,25$. Ainsi la surface du disque est comprise entre 1 et 4. Continuons ce procédé et utilisons des mailles de côté $0,1$.



Il y a 276 petits carrés contenus dans le disque et 344 qui le contiennent. L'aire de chacun d'eux est $0,01$ si bien que l'aire du disque σ est comprise entre $2,76$ et $3,44$. Poursuivons et considérons des mailles de côté $0,05$:



Nous avons cette fois 1176 mailles à l'intérieur et 1320 autour. Chaque maille a une aire de $0,0025$ si bien que σ est comprise entre $2,94$ et $3,2$. Si nous continuons à diminuer la largeur des mailles (en divisant la largeur toujours par 2 ou par 10 par exemple) nous obtenons une suite de nombres

$$a_1 = 0 \leq a_2 = 1 \leq a_3 = 2,76 \leq a_4 = 2,94 \leq a_5 \leq \cdots \leq \sigma$$

qui représentent l'aire de polygones contenus dans le disque et une autre suite de nombres

$$A_1 = 4 \geq A_2 = 4 \geq A_3 = 3,44 \geq A_4 = 3,2 \geq A_5 \geq \cdots \geq \sigma$$

La première suite est croissante et la seconde est décroissante.

LEMME 1.1. *La suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers une limite* a.

DÉMONSTRATION. Chaque a_n est un nombre qui mesure l'aire d'une surface contenue dans le disque, par conséquent a_n est plus petit que n'importe quel A_m, par exemple $a_n \leq 3,2$. Comme la suite des a_n est croissante, il arrivera un moment où le chiffre des unités stabilisera (en fait ce sera 3). Regardons le chiffre des dixièmes. A partir de a_5 qui est plus grand que 3 il ne peut qu'augmenter, sans pour autant dépasser 2, et lui aussi va finir par rester invariable (en fait ce sera 1). Le même raisonnement s'applique au chiffre des centièmes, des millièmes, etc. Ainsi il existe un nombre $a = 3,14\ldots$ qui est la *limite* de la suite (a_n).

Cette limite est caractérisée par le fait que les nombres a_n de la suite s'approchent arbitrairement de a quand n devient grand. Plus précisément si on se donne un nombre $\epsilon > 0$ aussi petit qu'il soit, il existe un entier n qui dépend de ϵ tel que tous les nombres a_m de la suite avec $m \geq n$ se trouvent à une distance de a plus petite que ϵ, i.e. $|a_n - a| \leq \epsilon$. Ici nous avons fait le raisonnement pour $\epsilon = 1$, puis pour $0,1$, etc. □

Le même raisonnement montre que la suite (A_n) aussi tend vers une limite A.

Proposition 1.2. *Les limites a et A sont égales.*

Démonstration. Pour montrer que $a = A$ nous allons voir que la quantité $A_n - a_n$ devient arbitrairement petite. Par exemple la différence $A_3 - a_3 = 0,68$ représente le fait qu'il y a 68 mailles du réseau de côté $0,1$ qui coupent le cercle. Pour celui de côté $0,05$ il y en a 144 qui donnent une aire de $0,36$.

Considérons un réseau dont les mailles ont un côté de $(0,1)^n = 0,00\ldots01$ (le 1 se trouve n chiffres après la virgule). Le nombre de mailles du polygone circonscrit au cercle moins celui des mailles du polygone inscrit est donné géométriquement par une "bande" polygonale à cheval sur le cercle. Sa largeur est d'au plus deux mailles, si bien que son aire est plus petite que celle d'une bande de largeur de 2 mailles qui ferait le tour intérieur du carré circonscrit de côté de longueur 2. Celle-ci vaut moins que $16 \cdot (0,1)^n$. Quand n devient grand, cette grandeur devient arbitrairement petite. □

Définition 1.3. Le nombre π est la valeur commune des limite a et A. Il s'agit en d'autres termes de l'aire d'un disque de rayon 1.

Remarque 1.4. Le nombre π vaut en fait environ

$$3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986$$

mais les moyens pour calculer tant de décimales, et plus, sont de nature plus analytique et informatique ! Un bon moyen d'en apprendre quelques unes est de se souvenir du poème suivant où la longueur de chaque mot code une décimale (sauf un mot de dix lettres codé comme 0) :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !
Immortel Archimède, artiste, ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Jadis, mystérieux, un problème bloquait
Tout l'admirable procédé, l'oeuvre grandiose
Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.
Ô quadrature ! Vieux tourment du philosophe

Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez
Défié Pythagore et ses imitateurs.
Comment intégrer l'espace plan circulaire ?
Former un triangle auquel il équivaudra ?

Nouvelle invention : Archimède inscrira
Dedans un hexagone ; appréciera son aire
Fonction du rayon. Pas trop ne s'y tiendra :
Dédoublera chaque élément antérieur ;

Toujours de l'orbe calculée approchera ;
Définira limite ; enfin, l'arc, le limiteur
De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle
Professeur, enseignez son problème avec zèle.

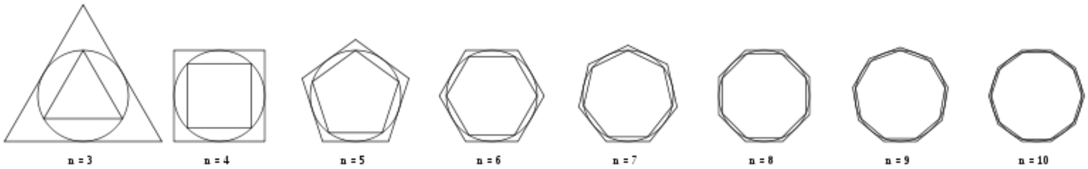
Proposition 1.5. *L'aire d'un disque de rayon r vaut πr^2.*

Démonstration. Un tel disque est obtenu par une homothétie de centre O et de rapport r. Nous avons vu qu'une telle homothétie multiplie les distances par r et les aires par r^2. □

2. Le périmètre du cercle

Quel est le rapport entre le périmètre d'un cercle et l'aire du disque que ce cercle détermine ? Nous allons voir que le nombre π apparaît encore ici et il nous aidera à choisir une nouvelle unité de mesure pour les angles : le radian.

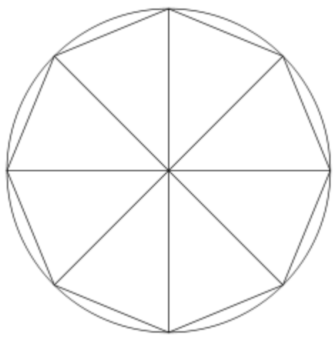
De même que nous avons parlé de l'aire du disque en la "coinçant" entre les aires de deux polygones, contenu dans et contenant respectivement le disque, nous pouvons calculer le périmètre d'un cercle de rayon 1 en l'approximant par des lignes polygonales, comme Archimède :



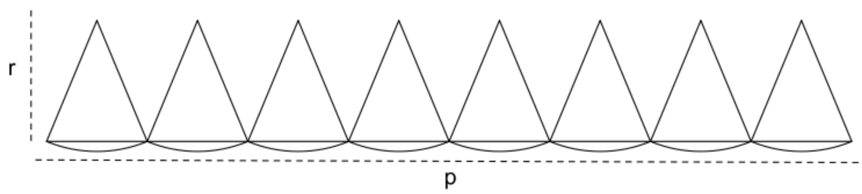
C'est ainsi qu'il prouve que le même nombre π s'utilise dans les deux formules (aire et périmètre). Dans ce même traité, Archimède prouve que le rapport entre le périmètre du cercle et son diamètre est compris entre $3+\dfrac{10}{71}$ et $3+\dfrac{1}{7}$.

Théorème 2.1. *Le périmètre d'un cercle de rayon* 1 *vaut* 2π*.*

Démonstration. Cette fois-ci nous allons effectuer le raisonnement de passage à la limite plus rapidement (et moins rigoureusement). Découpons le disque de rayon 1 en n secteurs isométrique en traçant n rayons à intervalles réguliers, c'est-à-dire que l'angle entre deux rayons consécutifs vaut $\dfrac{360^o}{n}$. On voit le cas $n=8$ sur l'illustration suivante :



Développons maintenant ce disque en posant les secteurs de disque bout à bout sur une droite de sorte que chaque arc de cercle soit tangent à cette droite. Voici à nouveau une illustration pour $n=8$:



Nous savons que l'aire du disque vaut π. D'autre part lorsque n devient grand, la différence entre les triangles curvilignes et des triangles usuels s'estompe. Appelons

r la hauteur commune de ces triangles et p le périmètre du cercle. Par conséquent l'approximation de π par l'aire de ces n triangles devient meilleure à mesure que n devient grand. Mais quand n tend vers l'infini, la hauteur r tend vers le rayon, qui vaut 1, et la largeur de la base de chaque triangle tend vers p/n. Ainsi π est approximé par l'aire de n triangles de hauteur 1 et de base p/n, i.e. $n \cdot \dfrac{p}{2n}$ et finalement $p = 2\pi$. $\square$

Corollaire 2.2. *Le périmètre d'un cercle de rayon r vaut $2\pi r$.*

Démonstration. Une homothétie de rapport r transforme un cercle de rayon 1 en un cercle de rayon r et multiplie les longueurs par r. $\square$

Ce calcul nous mène à la définition du radian. Souvent on mesure les angles en degrés. Un *degré* est un 360 ème de tour complet. Par exemple un angle plat vaut 180^o, un angle droit 90^o.

Définition 2.3. L'angle au centre d'un cercle qui intercepte un arc de cercle de longueur égale au rayon mesure *un radian*.

Ainsi, un angle plat vaut π radians et un angle droit $\pi/2$ puisque nous savons que le périmètre d'un cercle de rayon r vaut $2\pi r$. Pour convertir un angle mesuré en degrés en radians, il faut donc diviser par 360 puis multiplier par 2π. Inversément, pour convertir des radians en degrés il faut diviser par 2π puis multiplier par 360. Par exemple un radian vaut environ $57,29578^o$.

Remarque 2.4. La mesure d'un angle, en radians, degrés (ou en grades, pour-mille d'artillerie, degré-minute-seconde, etc.) n'est pas unique. En effet toutes ces mesures sont effectuées *à un tour complet près*. En d'autres termes si α est la mesure d'un angle en radians, $\alpha + 2k\pi$ est une autre mesure possible de ce même angle, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. La mesure d'un angle plat par exemple peut être π ou $-\pi$ ou -3π, etc. La plupart du temps on préfère utiliser la *seule* valeur comprise dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, mais il arrive aussi qu'on utilise des *petites valeurs négatives* comme $-\pi/2$.

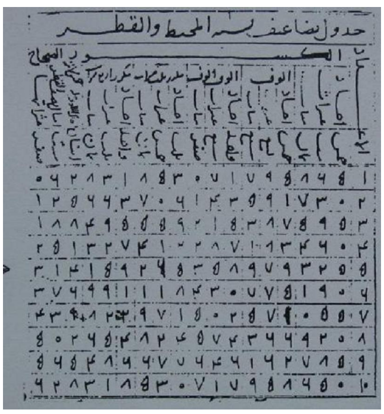
On pourrait faire l'analogie avec la mesure de l'heure en heures et en minutes. On ne dit jamais qu'il est 3 heures et 75 minutes, car on utilise une mesure des minutes dans $[0, 60[$. Par contre il arrive parfois que l'on dise qu'il est 3 heures 50 et d'autres fois qu'il est 4 heures moins 10.

Remarque 2.5. **Un peu d'histoire.** Pour approximer π Archimède encadre le périmètre du cercle par le périmètre de polygones à 96 côtés réguliers inscrit et circonscrit au cercle. Archimède s'arrête à 96 côtés car les calculs qu'il est amené à effectuer, avec valeurs approchées, sont déjà longs pour l'époque.

La curiosité des mathématiciens les pousse à déterminer le nombre π avec plus de précision. Au IIIe siècle, en Chine, Liu Hui propose comme rapport entre le périmètre et le diamètre la valeur pratique de 3 mais développe des calculs proches de ceux d'Archimède mais plus performants et fournit une approximation de π de $3,1416$.

Le mathématicien chinois Zu Chongzhi donna une approximation rationnelle encore plus précise de 355/113 (dont le développement décimal $3,1415929$ est identique à celui de π jusqu'à la 6ème décimale.

En Perse, en 1429, Al-Kashi calcule 14 décimales :



En 1596, toujours avec des méthodes géométriques, l'Allemand Ludolph van Ceulen calcule 20 décimales, puis 34 en 1609. Il est si fier de son exploit (il y consacra une bonne partie de sa vie) qu'il demande à ce que le nombre soit gravé sur sa tombe.

Ensuite, grâce au développement de l'analyse au XVIIe siècle, avec notamment les sommes et produits infinis, le calcul des décimales de π s'accélère.

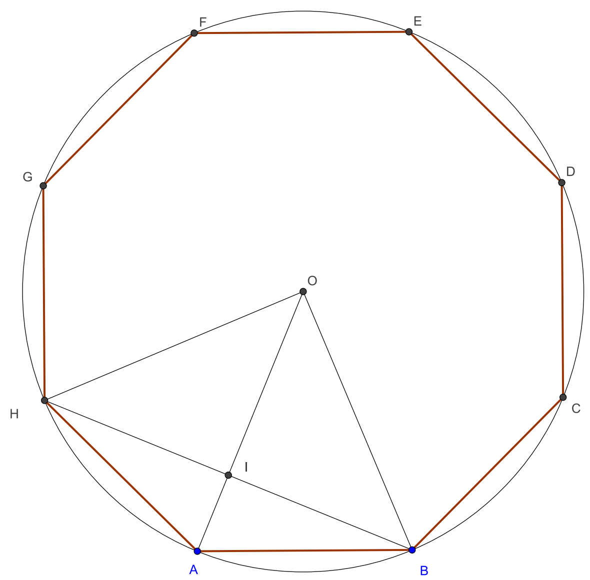
La lettre grecque π, première lettre du mot "périmètre", a été introduite par William Jones en 1706. Cette notation, reprise par Euler en 1736, est définitivement adoptée dès la fin du XVIIIe siècle.

Exemple 2.6. Comme Archimède, calculons successivement le périmètre d'un carré, puis d'un octogone régulier.

Le périmètre du carré vaut $4 \cdot 1 = 4$ et par Pythagore le rayon du cercle circonscrit vaut $r = \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Comme le périmètre du carré est plus petit que le périmètre du cercle circonscrit, on en déduit l'inégalité $4 < 2\pi r = \sqrt{2}\pi$. Ainsi

$$\pi > \frac{4}{\sqrt{2}} \cong 2.83$$

Continuons avec le calcul du périmètre de l'octogone. Traçons un octogone régulier comme dans la figure suivante :



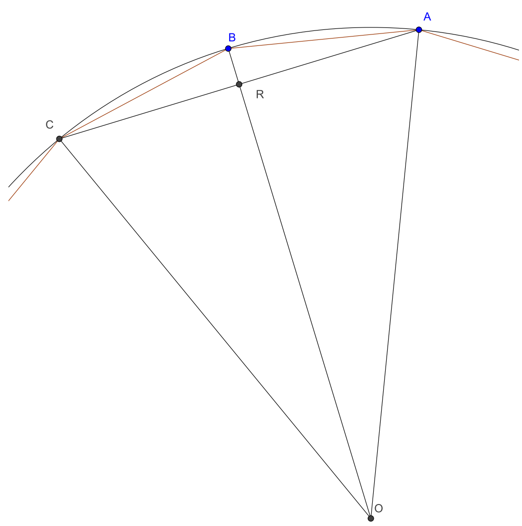
On cherche la longueur c_8 du segment $[AB]$. Considérons le triangle $\triangle OHB$, par Pythagore, $|HB|^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$. Ainsi $|HB| = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$. Appliquons le théorème de Pythagore au triangle $\triangle OIB$, $|OI| = \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}r$. Ainsi $|AI| = r - |OI| = r - \frac{\sqrt{2}}{2}r = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)r$. Finalement, on trouve le côté $|AB|$ de l'octogone, en appliquant Pythagore dans le triangle $\triangle AIB$:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2 + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 r^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}r^2 + r^2 - \sqrt{2}r^2 + \frac{1}{2}r^2} \\ &= \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right) r^2} \\ &= \sqrt{2-\sqrt{2}}\, r \end{aligned}$$

Ainsi le périmètre de l'octogone est égal à $8|AB|$, on arrive alors à l'approximation de π suivante :

$$8|AB| < 2\pi r \;\Leftrightarrow\; 8\sqrt{2-\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} < 2\pi\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Leftrightarrow\; \pi > 4\sqrt{2-\sqrt{2}} \cong 3.06$$

Continuons avec le cas du polygone à 16 côtés. Nous avons déjà calculé c_8 par le point précédent. Sur la figure ci-dessous, $|AR| = \frac{c_8}{2}$.



Appliquons Pythagore au triangle $\triangle ORA$, rectangle en R : $|OR| = \sqrt{r^2 - \left(\frac{c_8}{2}\right)^2}$. Ainsi $|BR| = r - |OR| = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{c_8}{2}\right)^2}$ et donc $|AB| = \sqrt{\left(\frac{c_8}{2}\right)^2 + \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{c_8^2}{4}}\right)^2} \cong$ 0.28. Ainsi l'approximation de π devient $16|AB| < 2\pi r$ et donc

$$\pi > 8|AB|\frac{2}{\sqrt{2}} \cong 3.12$$

Archimède a eu le courage de continuer avec 32, puis 64 côtés...