Rédaction

Question 29: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 *Réservé au correcteur*

Soit

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2+2x-2}.$$

(a) Montrer que $f(x)$ est bien définie en tout point $x \in [1,3]$.

(b) Calculer les extrema globaux de f sur l'intervalle $[1,3]$, en détaillant les étapes de votre raisonnement.

a) $x^2+2x-2 \neq 0$ POUR POUVOIR ÊTRE DÉFINIE

$(x-(-1+\sqrt{3})).(x-(-1-\sqrt{3}) \neq 0$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ x \neq -1+\sqrt{3} \quad (<1) \\ \ \ x \neq -1-\sqrt{3} \quad (<0) \end{array}\right\}$ LA FONCTION EST DONC BIEN DEFINIE SUR $x \in [1;3]$

a) $f(x)$ est bien définie $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $\underbrace{x^2+2x-2}_{P(x)} \neq 0$.

Or $P(x) = (x-(-1+\sqrt{3}))(x-(-1-\sqrt{3}))$

et $P(x) = 0 \iff \begin{cases} x = -1+\sqrt{3} < 1 \\ \text{ou} \\ x = -1-\sqrt{3} < 1 \end{cases}$

Donc $\forall x \in [1,3]$, $P(x) \neq 0$ et la fonction $f(x)$ est bien définie.

Examen janvier 2022

Question 29: *Cette question est notée sur 5 points.*

$\square_0$ $\square_1$ $\square_2$ $\square_3$ $\square_4$ $\square_5$	*Réservé au correcteur*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ des suites réelles et $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Donner la définition de $\lim_{n\to\infty} u_n = a$.

(b) Supposons que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = b$. Montrer que $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = a + b$.

a) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Sous nos hypothèses :

$$\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q } \forall n \geqslant n_0 \quad |u_n - a| \leqslant \varepsilon/2 \\ \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ t.q } \forall n \geqslant n_1 \quad |v_n - b| \leqslant \varepsilon/2 \end{cases}$$

Donc $\forall n \geqslant n_2 := \max\{n_0, n_1\}$ on a

$$|(u_n + v_n) - (a+b)| \underset{\text{ineg. triang.}}{\leqslant} |u_n - a| + |v_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = a + b$.

Révisions série de Taylor (série 12

Exercice 3. (Séries de Taylor)

Étudier la limite $n \to \infty$ du développement limité d'ordre n autour de $x = a$, pour chacune des fonctions ci-dessous (en particulier, étudier le reste $R_n(x)$ comme vu en cours pour $x \mapsto 1/(1-x)$). Ensuite, donner la série de Taylor de f autour de a, ainsi que son domaine de convergence.

a) $f(x) = e^{2x+1}$ avec $a = 0$, b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ avec $a = 2$.

a) • Développement limité de f en $a=0$ d'ordre n : comme $f \in C^n(\mathbb{R})$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{S_n(x)} + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{R_n(x)} \quad \text{où} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

On a $f(0) = e$, $f'(0) = 2 \cdot e^{2\cdot 0+1} = 2e$, $f^{(2)}(0) = 2^2 e^{2\cdot 0+1} = 2^2 \cdot e$

(On montre, par récurrence, $f^{(k)}(x) = 2^k \cdot e^{2x+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k \cdot e}{k!} x^k + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

• Série de Taylor : comme $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k e}{k!} x^k \quad \left(= \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k \right)$$

Rayon de convergence R ? Critère de D'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{2}{n+1} \right| = 0$$ donc, par un Théorème du cours,

$R = +\infty$.

• Étude du reste : on a $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} x^{n+1}$, pour un certain $u \in]a, x[$. $a = 0$

$$= \frac{2^{n+1} e^{2\cdot u+1}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{2^{n+1} e^{2\cdot|x|+1}}{(n+1)!}|x|^{n+1} := a_n$$

Critère de D'Alembert : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{2|x|}{n+2} = 0$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et donc par comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to 0} R_n(x) = 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

- <u>Conclusion</u> : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$

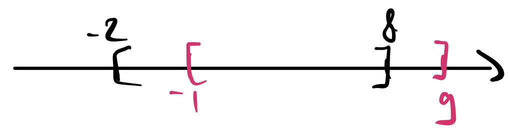
$$\begin{array}{ccccc} f(x) & = & S_n(x) & + & R_n(x) \\ & & \downarrow n\to+\infty & & \downarrow n\to+\infty \\ f(x) & = & S(x) & + & 0 \end{array}$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle f(x) = S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e\cdot\frac{2^k}{k!}x^k$.

Question 8 : Soit $f :]-3,2[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2+4x-1$. Alors pour tous les $x \in]-3,2[$ et $y \in]-3,2[$, tels que $x \neq y$, on a:

- ☐ $-3 \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 7$
- ☒ $-2 \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 8$
- ☐ $-4 \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 6$
- ☐ $-1 \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 9$

Par le Théorème des accroissements finis, $\forall x,y \in]-3,2[$, $\exists c \in]x,y[\subset]-3,2[$ tel que, $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$



Or $f'(c) = 2c+4$ donc pour $c \in]-3,2[$ on a

$$f'(c) \in]2\cdot(-3)+4\,,\,2\cdot(2)+4[=]-2,8[$$

Donc $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \in]-2,8[$, pour $x,y \in]-3,2[$.

or $]-2,8[\subset [-2,8]$ donc en particulier, $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \in [-2,8]$

Question 11 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = \mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{n^2 \operatorname{Log}(1+\frac{1}{n})}$. Alors:

- [ ] $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \mathrm{e}$
- [x] $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$
- [ ] $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$
- [ ] $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

$a_n = \exp\left(-n + n^2 \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

On sait que $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

$(= x + x\varepsilon(x)$

On prend $x = \frac{1}{n}$ et on a :

$\rightarrow \exp\left(-n + n^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$

$= \exp\left(n\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ forme indéterminée.

$a_n = \exp\left(-n + n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$

$= \exp\left(\frac{-1}{2} + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ donc, par par continuité de exp,

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \exp\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{2} + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Question 13 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}\,.$$

Alors :

- [ ] $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
- [ ] $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -1$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- [x] $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- [ ] $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -1$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$a_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$

$= \dfrac{\sqrt{n+(-1)^n} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+(-1)^n} + \sqrt{n}} \cdot \left(\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}\right) = \dfrac{n + (-1)^n - n}{\sqrt{n+(-1)^n} + \sqrt{n}} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n} + \sqrt{n}}$

Si $\underset{2k}{\overset{\shortparallel}{n}}$ est pair : $a_{2k} = \dfrac{1}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k}}$ donc $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{2k} = 0$.

Si $\underset{2k+1}{\overset{\shortparallel}{n}}$ est impair $a_{2k+1} = \dfrac{-1}{\sqrt{2k+1-1} + \sqrt{2k+1}}$ donc $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{2k+1} = 0$.

Donc on a $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

<u>Barème de l'an dernier :</u>

$$\begin{cases} 18 \text{ QCM} \times 3 \text{ pts} \\ 10 \text{ V/F} \times 1 \text{ pts} \\ \text{Questions ouvertes} : 16 \text{ pts} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ 45 min

80 pts.