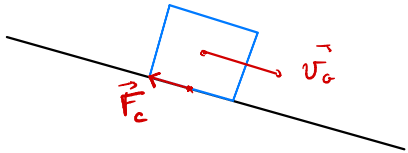
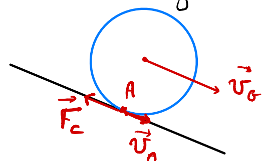
Sens d'une force de frottement sec

① **Cinétique** → toujours opposée à la vitesse du point où elle s'applique



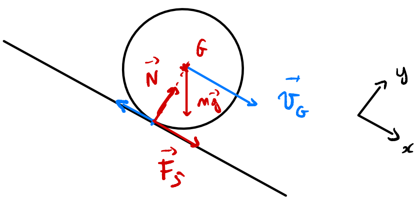
glissement



$\vec{v}_A \neq 0$ → vitesse de glissement

② **Statique** ~ contrainte

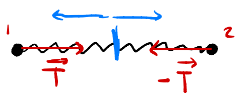
Ex : roulement sans glissement

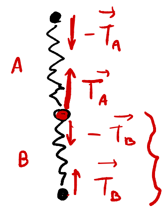


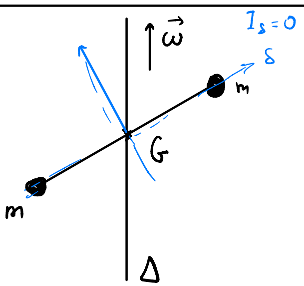
$$\vec{F}_S = F_S\,\hat{e}_x \rightarrow \boxed{F_S < 0}$$

$F_S \lessgtr 0$

Ressort







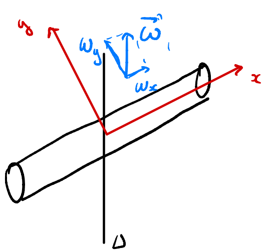
$\Delta \neq$ axe princ. d'inertie.

$\vec{L}_G$? ① → calcul direct $\vec{L}_G = \sum_\alpha m_\alpha \vec{GP}_\alpha \wedge \vec{v}_\alpha$

↳ fonctionne pour qlques pts mat.

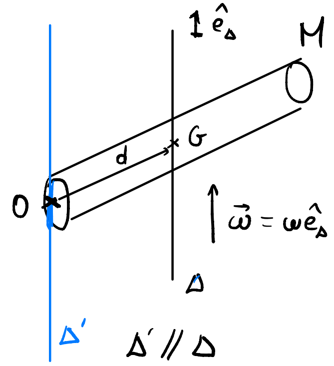
② À partir du tenseur d'inertie $\overleftrightarrow{I}^{(G)}$

↳ $\vec{L}_G = \overleftrightarrow{I}^{(G)} \cdot \vec{\omega}$



$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x \omega_x \\ I_y \omega_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Steiner



On connait $I_\Delta^{(G)}$

Rappel : $\underline{\vec{L}_G \cdot \hat{e}_\Delta} = I_\Delta^{(G)} \omega = \text{“} L_{G,\Delta} \text{”}$

$\hookrightarrow \quad I_\Delta^{(G)} = \hat{e}_\Delta \cdot \overleftrightarrow{I}_G \cdot \hat{e}_\Delta$

$$I_{\Delta'}^{(O)} = I_\Delta^{(G)} + M d^2$$

Quantité de mvt :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\sum \vec{F}^{ext}} \qquad \vec{P}_{tot} = \sum_i \vec{P}_i$$

Bien choisir le "système"

- $\vec{P}_{tot}$ est conservée si $\sum \vec{F}^{ext} = \vec{0}$
- Même si $\sum \vec{F}^{ext} \neq \vec{0}$, on peut avoir $\sum \vec{F}^{ext} \cdot \vec{u} = 0$

  alors $\vec{P}_{tot} \cdot \vec{u} = \text{constante}$

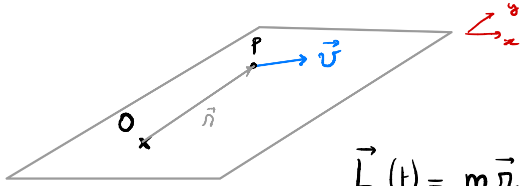
Est-ce qu'une force est conservative ? $\vec{F}(\vec{r})$

① $$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \underset{\downarrow \atop V(\vec{r}_2)}{-V_2} - (\underset{\downarrow \atop V(\vec{r}_1)}{-V_1})$$

② Montrer qu'on peut écrire $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$

Mouvement centrale $\rightarrow$ $\sum \vec{F}^{ext}$ pointe à chaque instant vers le même point fixe

Mouvement plan



$$\vec{v}(t) = v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y$$

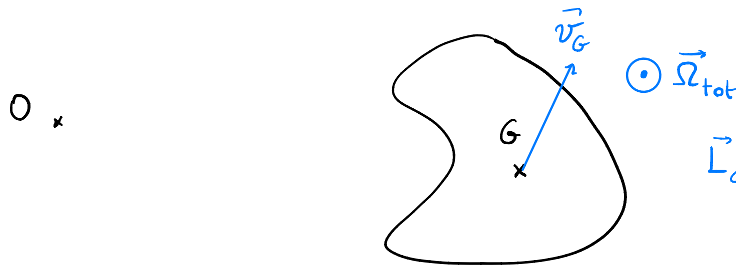
$$\vec{L}_0(t) = m \vec{r} \wedge \vec{v} \rightarrow \vec{L}_0(t) \parallel \hat{e}_z$$

Théorème de König (transfert)

→ On sait calculer le mom. cin. p/r au centre de masse G

→ On nous demande le mom. cin. p/r à un point fixe O

$$\vec{L}_O = \vec{L}_G + \underbrace{M \, \vec{OG} \wedge \vec{v}_G}_{\text{mom. cin. d'un pt mat. de masse } M}$$



$$\vec{L}_G = \overleftrightarrow{I}_G \cdot \vec{\Omega}_{tot}$$

Stabilité d'un point d'équilibre

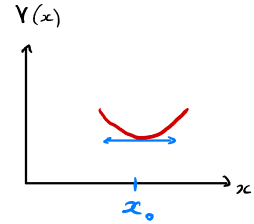
- Point d'équilibre $\Leftrightarrow$ $\sum \vec{F}^{ext} = \vec{0}$
- Si les forces sont conservatives $\sum \vec{F}^{ext} = -\vec{\nabla} V$

  ↳ selon une dimension " x " → équilibre : $\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0$

Ex : $V(x) = \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = kx \qquad (\vec{F} = -kx \hat{e}_x)$

Equilibre $\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=x_0} = k x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

<u>Stabilité</u> : Si on connait le potentiel



- $\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} > 0 \rightarrow$ stable

- $\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} < 0 \rightarrow$ instable

---

<u>Frottement visqueux</u> (chute libre) $\ddot{z} = -g - \frac{c}{m}\dot{z} \rightarrow \dot{v} = -g - \alpha v(t)$ (1)

Solution stationnaire : v = constante $\Rightarrow \dot{v} = 0$

$v_\infty \rightarrow -g - \alpha v_\infty = 0 \Rightarrow v_\infty = -\frac{g}{\alpha}$

$$u(t) = v(t) - v_\infty \Leftrightarrow v(t) = u(t) - \frac{g}{\alpha}$$

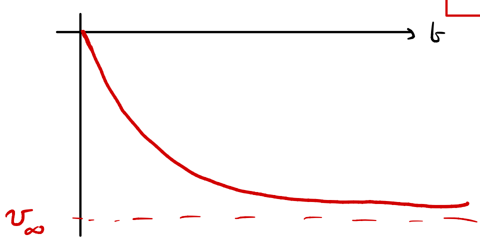
(1) : $\dot{u} = -g - \alpha\left(u(t) - \frac{g}{\alpha}\right) = -\alpha u(t)$

↳ (2) $\dot{u} = -\alpha u \rightarrow u(t) = A e^{-\alpha t}$

Condition initiale : $v(t=0) = 0 \rightarrow u(t=0) = -v_\infty = A$

Solution complète : $u(t) = -v_\infty e^{-\alpha t}$

$$\boxed{v(t) = v_\infty\left(1 - e^{-\alpha t}\right)} \quad \text{où } v_\infty = -\frac{g}{\alpha}$$

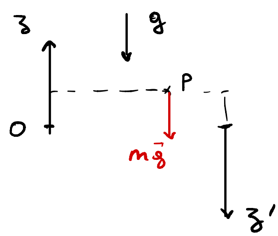


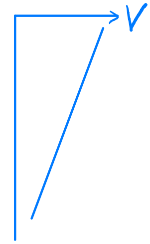
$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \neq \underline{k_{eff}} \rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} \rightarrow$ où $s = R\theta$

$k\,\Delta x = F$

$[k] = \frac{N}{m}$

Signe de l'énergie potentielle





$$V(z) = mgz \rightarrow -\frac{\partial V}{\partial z} = -mg$$

$$V(z') = -mgz'$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{e}_z = -mg\,\hat{e}_z$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(z') = -\frac{\partial V}{\partial z'}\hat{e}_{z'} = +mg\,\hat{e}_{z'}$$

$$E = K + V(z)$$

ou $E = K + V(z')$ $\Big) =$ pour une position et vitesse de P donnée

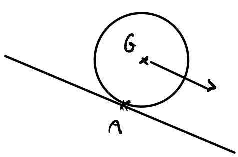
K ↓ en. cinétique

$$K = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$ pour un syst. de pt. mat.

Solide : $K^{(G)} = \frac{1}{2} M_{tot} v_G^2 + \frac{1}{2} I_\Delta^{(G)} \omega_\Delta^2$ → rotation autour de Δ

$$K^{(A)} = \frac{1}{2} I^{(A)} \omega^2$$

↳ Steiner



(cf. cours 12)