Corrigé Test 3 - Nombres complexes et algèbre linéaire 19.01.22

Le test dure 90 minutes. Toutes les réponses doivent être justifiées et rédigées de manière claire.

Exercice 1. *(29 points)*

a) Mettre $\sqrt{2}ie^{i\frac{\pi}{2}}$ sous forme cartésienne ;

$$\sqrt{2}ie^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}i\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}i\,(0+i\cdot 1) = \sqrt{2}i\cdot i = -\sqrt{2}$$

b) Mettre $\sqrt{3}+i$ sous forme polaire, puis calculer $(\sqrt{3}+i)^6$ et donner la réponse sous forme cartésienne ;
On a $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{4} = 2$, donc

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

En utilisant la formule de Moivre, on obtient

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+i)^6 &= 2^6\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^6 = 2^6\left(\cos\left(\frac{6\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{6}\right)\right)\\ &= 2^6\left(\cos(\pi)+i\sin(\pi)\right) = 2^6\left(-1+0\cdot i\right) = -64.\end{aligned}$$

c) Déterminer z tel que $z^2 = -5+12i$ sous la forme cartésienne.
On écrit $z = a+ib$ et on a $a^2-b^2+2abi = -5+12i$. On a donc le système

$$\begin{cases} a^2-b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{6}{a} \\ a^2-\frac{36}{a^2} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow a^4+5a^2-36 = 0 \Leftrightarrow (a^2-4)(a^2+9) = 0.$$

Ainsi, on obtient $a = \pm 2$ et donc $b = \pm 3$. Les solutions sont $z = 2+3i$ ou $z = -2-3i$.

d) Donner toutes les solutions de l'équation $z^5 = 1+i$ sous la forme polaire.
On remarque que $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$. On écrit $z = r(\cos(\phi)+i\sin(\phi))$ et on obtient, en utilisant la formule de Moivre,

$$r^5(\cos(5\phi)+i\sin(5\phi)) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right).$$

Ceci revient au système

$$\begin{cases} r^5 = \sqrt{2} \\ \cos(5\phi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(5\phi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = 2^{\frac{1}{2}} \\ 5\phi = \dfrac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{10}} \\ \phi = \dfrac{\pi}{20}+\dfrac{2k\pi}{5}. \end{cases}$$

Les cinq racines se trouvent en posant $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

e) Caractériser géométriquement la similitude d'équation $f(z) = -2iz - 1 + 2i$;
Comme $-2i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$, on a une homothétie de rapport 2 et une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$. De plus, on a une translation de vecteur $(-1; 2)$. Cherchons les points fixes de la transformation :

$$z = -2iz - 1 + 2i \Leftrightarrow (1+2i)z = -1 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{-1+2i}{1+2i} = \frac{(-1+2i)(1-2i)}{5} = \frac{3+4i}{5}.$$

Ainsi, l'homothétie et la rotation sont de centre $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

f) Déterminer la représentation graphique de l'équation $z\bar{z} - 2i(z - \bar{z}) - 5 = 0$.
Si $z = a + bi$, on a

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2i \cdot 2bi - 5 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 4b - 5 = 0 &\Leftrightarrow a^2 + (b+2)^2 - 4 - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + (b+2)^2 = 9. \end{aligned}$$

Il s'agit du cercle de centre $(0; -2)$ et de rayon 3.

Exercice 2. *(9 points)*

a) Soit $(G, *)$ un groupe. Montrer qu'un sous-ensemble non-vide $H \subset G$ est un sous-groupe si et seulement si $x * y$ et y^{-1} appartiennent à H pour tous $x, y \in H$.
Si H est un sous-groupe de G, la condition est vraie car $*$ est une loi de composition sur H pour laquelle tout élément de H admet un inverse (dans H).
Supposons maintenant que la condition est vérifiée. Alors $*$ est une loi de composition sur H (pour $x, y \in H$, on a bien que le produit $x * y$ est dans H). Elle est associative car $*$ l'est dans G. Comme H est non-vide, on peut choisir un élément $x \in H$. Son inverse x^{-1} est aussi dans H et donc le produit $x * x^{-1}$ de même. Ceci montre que l'élément neutre e de G se trouve dans H. Tous les éléments de H sont inversibles dans G et par hypothèse l'inverse se trouve dans H. Par conséquent, H est un sous-groupe.

b) Montrer que $U = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, \cdot)$, où $\cdot$ est la multiplication usuelle des nombres complexes.
Soient $z, w \in U$. Alors $(z \cdot w)^n = z^n \cdot w^n = 1 \cdot 1 = 1$, donc $z \cdot w \in U$.
Si $z = a + ib \in U$, alors $z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{1}{z}$ et donc $(z^{-1})^n = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1} = 1$. Ainsi, $z^{-1} \in U$ et U est un sous-groupe de $\mathbb{C}$.

Exercice 3. *(8 points)*

Soit $E = \{(a;b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2+b^2 = 1\}$. On définit l'opération $*$ par $(a;b)*(c;d) = (ac-bd; ad+bc)$.

a) Montrer que $*$ est une loi de composition associative.
Montrons d'abord que c'est une loi de composition. On veut que si $(a;b) \in E$ et $(c;d) \in E$, alors $(a;b)*(c;d) = (ac-bd; ad+bc) \in E$. On suppose donc que $a^2+b^2 = 1 = c^2+d^2$ et on calcule

$$\begin{aligned}(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 &= a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2 \\ &= a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2) = a^2+b^2 = 1\end{aligned}$$

Ainsi, $*$ définit bien une loi de composition.
Associativité :

$$\begin{aligned}((a;b)*(c;d))*(e;f) &= (ac-bd; ad+bc)*(e;f) \\ &= ((ac-bd)e-(ad+bc)f; (ac-bd)f+(ad+bc)e) \\ &= (ace-bde-adf-bcf; acf-bdf+ade+bce) \\ (a;b)*((c;d)*(e;f)) &= (a;b)*(ce-df; cf+de) \\ &= (a(ce-df)-b(cf+de); a(cf+de)+b(ce-df)) \\ &= (ace-adf-bcf-bde; acf+ade+bce-bdf)\end{aligned}$$

Les deux résultats sont égaux, donc la loi de composition est associative.

b) Déterminer son élément neutre.
L'élément neutre est $(1;0)$, car $(1;0)*(a;b) = (a;b) = (a;b)*(1;0)$.

c) Est-ce que $(E,*)$ forme un groupe ? Justifier.
Oui, car on a une loi associative et un élément neutre. De plus, tout élément est inversible, d'inverse $\left(\frac{x}{x^2+y^2}; -\frac{y}{x^2+y^2}\right) = (x;-y)$, car $x^2+y^2 = 1$.

Exercice 4. *(4 points)*

On considère l'anneau $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ muni de l'addition et de la multiplication usuelles.

a) Déterminer un inverse additif $[k]$ de $[2]$ avec $0 \le k \le 11$.
L'inverse est $[10]$ car $[2]+[10] = [12] = [0]$.

b) Déterminer un inverse multiplicatif $[m]$ de $[5]$ avec $0 \le m \le 11$.
L'inverse est $[5]$ (lui-même !) car $[5]\cdot[5] = [25] = [1]$.

c) Est-ce que $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ est un corps ? Justifier.
Non, ce n'est pas un corps, car 12 n'est pas un nombre premier.
Autre justification : $[4]$ est un diviseur de 0 car $[4]\cdot[6] = [24] = [0]$, donc ça ne peut pas être un corps par la proposition 2.3 du cours II.

Exercice 5. *(6 points)*

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau.

a) Donner les conditions pour qu'un sous-ensemble $B \subset A$ soit un sous-anneau de A.
B est un sous-anneau de a si pour tout $x, y \in B$, les éléments $-x$, $x+y$, $x\cdot y$ et 1 appartiennent à B.

b) Montrer que l'ensemble $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{R})$.
On voit facilement que la somme et l'opposé de matrices de cette forme sont encore dans B et que la matrice unité est aussi dans B. Il reste donc à vérifier que le produit de deux matrices de B est dans B :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by & ay + bx \\ -ay - bx & ax - by \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. *(4 points)*

Soit K un corps et $x, y \in K$. Montrer que si $xy = 0$, alors soit $x = 0$, soit $y = 0$.
Supposons que $y \neq 0$. Alors l'inverse y^{-1} existe et nous pouvons écrire

$$0 = 0y^{-1} = (xy)y^{-1} = x(yy^{-1}) = x \cdot 1 = x.$$

Exercice 7. *(4 points)*

Soit $(G; *)$ un groupe avec e comme élément neutre.

a) Si $x, y \in G$, que vaut $(x * y)^{-1}$?
On a $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.

b) Si pour tout $g \in G$, on a $g * g = e$, alors que vaut g^{-1} ?
On a $g^{-1} = g$.

c) Montrer que si pour tout $g \in G$, on a $g * g = e$, alors G est forcément commutatif.
Soit $g, h \in G$. Alors $g * h = g^{-1} * h^{-1} = (h * g)^{-1} = h * g$. Ainsi, G est commutatif.