Exercice 1.

a) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 1 \qquad | \cdot 6$
$3x - 2x > 6$
$x > 6$
$S =]6; +\infty[$.

b) $3(x+1) - 2(x+2) > x$
$3x + 3 - 2x - 4 > x$
$x - 1 > x | - x$
$-1 > 0$
l'inéquation est impossible $S = \emptyset$.

c) $4(2x+1) - 3(2x-1) \geq 2x$
$8x + 4 - 6x + 3 \geq 2x$
$2x + 7 \geq 2x \qquad | - 2x$
$7 \geq 0$
l'inéquation est indéterminée $S = \mathbb{R}$.

d) Faisons l'étude de signe de la fonction donnée, $4x^2 + 28x + 49 = (2x+7)^2$:

		$-\frac{7}{2}$	
$4x^2 + 28x + 49$	$+$	0	$+$

Ainsi la fonction n'est jamais négative, mais elle vaut 0 en $x = -\frac{7}{2}$, donc $S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$.

e) Faisons l'étude de signe de la fonction donnée, $x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5)$:

		4		5	
$x^2 - 9x + 20$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi $S =]-\infty; 4] \cup [5; +\infty[$.

f) Faisons l'étude de signe de la fonction donnée, $-x^2 + x + 6 = -(x+2)(x-3)$:

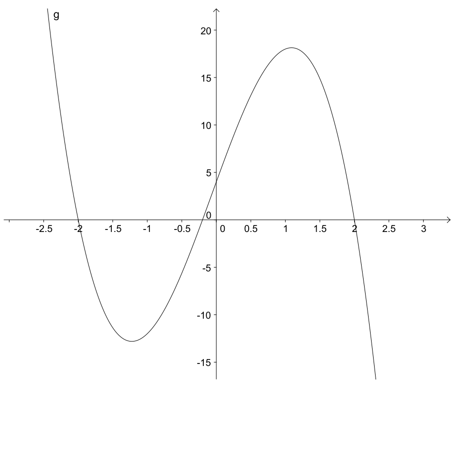
		-2		3	
$-x^2 + x + 6$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ainsi $S = [-2; 3]$.

Exercice 2.

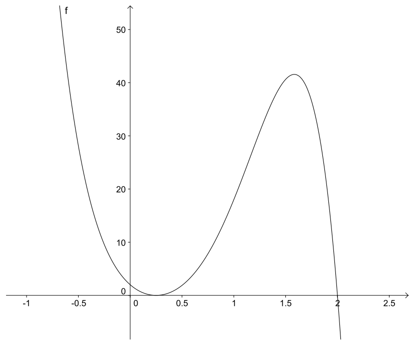
a) La fonction est définie quelque soit $x \in \mathbb{R}$ et donc $D(f) = \mathbb{R}$.

		-2		$-\frac{1}{5}$		2	
$2 - x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$5x + 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$



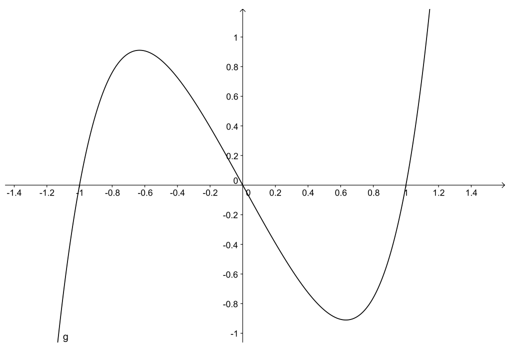
b) La fonction est définie quelque soit $x \in \mathbb{R}$ et donc $D(f) = \mathbb{R}$.

		$\frac{1}{4}$		2	
x^2+1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(1-4x)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$



c) Comme $f(x) = x^5 + x^3 - 2x = x(x^4 + x^2 - 2) = x(x^2+2)(x^2-1) = x(x^2+2)(x-1)(x+1)$, la fonction est définie quelque soit $x \in \mathbb{R}$ et donc $D(f) = \mathbb{R}$

		-1		0		1	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2+2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$



Exercice 3. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
& (x-y)^2 \geq 0 \\
\iff\ & x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \qquad \mid +2xy \\
\iff\ & x^2 + y^2 \geq 2xy.
\end{aligned}
$$

Exercice 4. On a $a \leq h \leq g \leq m \leq b$. De plus :

- $m = g$

  $\iff \dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$

  $\iff \dfrac{(a+b)^2}{4} = ab$ (cette équivalence est vraie car a et b sont positifs)

  $\iff a^2 + 2ab + b^2 = 4ab$

  $\iff a^2 - 2ab + b^2 = 0$

  $\iff (a-b)^2 = 0$

  $\iff a = b$

- $m = h$
$\iff \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$
$\iff \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{2ab}{a+b}$
$\iff (a+b)^2 = 4ab$
On conclut comme dans le premier cas que $a = b$.

- $g = h$
$\iff \sqrt{ab} = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$
$\iff ab = \dfrac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$ (cette équivalence est vraie car a et b sont positifs)
$\iff 1 = \dfrac{4ab}{(a+b)^2}$
On conclut ainsi également que $a = b$.

Exercice 5.

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 > 0$ (on essaie d'abord de trouver les racines de ce polynôme parmi les diviseurs de 6)
$(x-3)(x+2)(x-1) > 0$
avec $f(x) = (x-3)(x+2)(x-1)$, on obtient :

		-2		1		3	
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$S =]-2;1[\cup]3;+\infty[$.

b) $6x^3 - 10x^2 - 3x \leq -2x^2 + 3x - 8$
$6x^3 - 10x^2 - 3x + 2x^2 - 3x + 8 \leq 0$
$6x^3 - 8x^2 - 6x + 8 \leq 0$
$6x(x^2-1) - 8(x^2-1) \leq 0$
$(6x-8)(x^2-1) \leq 0$
$2(3x-4)(x-1)(x+1) \leq 0$
avec $f(x) = 2(3x-4)(x^2-1)$, on obtient :

		-1		1		$\frac{4}{3}$	
$2(3x-4)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$S =]-\infty;-1] \cup \left[1;\frac{4}{3}\right]$.