Rappel : Base = système de générateurs libre

Série 16 : Si $\dim V = n \Rightarrow n$ vect. lin. indépendants forme une base

Thm Rang : $\alpha : V \to W$ une application linéaire, alors
$\dim V = \text{rang}(\alpha) + \dim(\text{Ker}(\alpha))$

- $\alpha : V \to W$. α injective $\Leftrightarrow$ $\text{Ker}(\alpha) = \{0\}$
- Si $\dim V = \dim W$, alors α injective $\Leftrightarrow$ α surjective $\Leftrightarrow$ bijective

V. Opérations élémentaires

(Injective : si $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$)

Nous avons terminé la semaine passée en identifiant l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires entre deux espaces de dimension finie avec un espace vectoriel de matrices.(*) Nous allons voir aujourd'hui que cette identification est aussi compatible avec le produit. Nous verrons ensuite quelques matrices élémentaires que nous utiliseront dans les cours suivants.

V, W K espace vectoriel, $\dim W = n$, $\dim V = m$ $\quad T : \mathcal{L}(V,W) \to M_{n\times m}(K)$

1 Espaces vectoriels de dimension finie

Pour commencer, nous voulons réfléchir à la signification du choix d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ d'un K-espace vectoriel V de dimension finie n. Nous nous en servons pour écrire la matrice d'une application linéaire $\alpha : V \to V$, mais aussi pour se représenter les éléments $v \in V$ comme des vecteurs écrits en colonne :

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B$$

où les λ_i sont les coefficients des vecteurs de base e_i dans l'expression de v comme combinaison linéaire des e_i. Explicitement, $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Mais alors, si V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, nous identifions les éléments de V avec des vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où $a, b \in \mathbb{R}$!

Théorème 1.1. *Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie n. Alors il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\alpha : V \to K^n$.*

par exemple, dans $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ muni de la base $B = (x^2, x, 1)$,
tout polynome $ax^2 + bx + c = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_B \in \mathbb{R}^3$

Démonstration. On choisit une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V et on définit $\alpha : V \to K^n$ de la façon suivante :

$$\alpha(e_i) = (0;0;\dots;\underset{i^{\text{ème}}\text{ position}}{\underset{\uparrow}{1}};0;\dots,0) \in K^n$$

Par linéarité, si $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, alors $\alpha(v) = (\lambda_1;\lambda_2;\dots;\lambda_n)$

Il s'agit d'un isomorphisme car

- α injective car $\ker(\alpha) = \{0\}$
- V et K^n de même dimension $\Rightarrow$ α injective $\Rightarrow$ α bijective.

□

Exemple 1.2. Soit $\mathbb{Q}[x]^{\leq 5}$ l'espace vectoriel rationnel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de degré ≤ 5.

c'est un EV de dimension 6 $\Rightarrow$ isomorphe à $\mathbb{Q}^6$.

2 Produit et composition

Soit K un corps, V un K-espace vectoriel de dimension finie m et W un K-espace vectoriel de dimension finie n. Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ de V et une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de W. Considérons l'application $T : \mathcal{L}(V, W) \to M_{n\times m}(K)$ qui envoie une application linéaire $\alpha : V \to W$ sur la matrice $(\alpha)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ dont les colonnes sont les ~~coordonnées~~ composantes des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimés dans la base $\mathcal{C}$. Nous avons démontré que cette application est un isomorphisme de K-espaces vectoriels. Montrons à présent que cet isomorphisme respecte aussi le produit.

Définition 2.1. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq m} \in M_{n\times m}(K)$ et $B = (b_{jk})_{1\leq j\leq m; 1\leq k\leq p} \in M_{m\times p}(K)$. Le *produit* $A \cdot B \in M_{n\times p}(K)$ est la matrice C dont le coefficient

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}.$$

$$i^{\text{ème}}\text{ ligne}\begin{pmatrix} a_{i1} \cdots a_{im} \end{pmatrix} \begin{array}{c} k^{\text{e}}\text{ col} \\ \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} c_{ik} \end{pmatrix}$$

$$A_{n\times m} \cdot B_{m\times p} = C_{n\times p}$$

On ne peut donc multiplier A avec B (dans cet ordre) si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. On multiplie "ligne par colonne".

Exemple 2.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e-2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Lorsque $n = m$, on peut multiplier deux matrices carrées $n \times n$ entre elles et on retrouve une telle matrice carrée.

Théorème 2.3. *Les matrices carrées $M_n(K)$ forment un anneau.*

Ajoutons à notre panoplie un K-espace vectoriel U de dimension finie p muni d'une base $\mathcal{D} = (g_1, \dots, g_p)$.

Proposition 2.4. *Soit $\alpha : V \to W$ et $\beta : W \to U$ deux applications linéaires. Alors $T(\beta \circ \alpha) = T(\beta)T(\alpha)$.*

Démonstration. Puisque T est déterminée par les images des vecteurs de base, il suffit de suivre les vecteurs e_i au travers de α, puis β. L'image $\alpha(e_i)$ s'exprime comme combinaison linéaire $\sum_{j=1}^n a_{ji} f_j$, si bien que la i-ème colonne de la matrice $T(\alpha)$ est constituée des coefficients a_{ji}. La matrice $T(\beta\circ\alpha)$ est déterminée par les images des e_i et nous calculons donc

$$\beta(\alpha(e_i)) = \beta\Big(\sum_{j=1}^n a_{ji} f_j\Big) \underset{\beta \text{ linéaire}}{=} \sum_{j=1}^n a_{ji}\, \beta(f_j) = \sum_{j=1}^n a_{ji} \underbrace{\sum_{k=1}^p b_{kj} g_k}_{=\beta(f_j)}$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ji} b_{kj} g_k = \sum_{k=1}^p \Big(\sum_{j=1}^n b_{kj} a_{ji}\Big) \cdot g_k$$

Le k-ème coefficient de la i-ème colonne de la matrice de $\beta \circ \alpha$ est $\displaystyle\sum_{j=1}^n b_{kj} a_{ji}$, c'est-à-dire, par définition du produit matriciel, le k-ème coefficient de la i-ème colonne de la matrice $T(\beta)T(\alpha)$. □

Exemple 2.5. Soit $\mathbb{F}_p[x]^{\leq k}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq k$ à coefficients dans le corps à p éléments $\mathbb{F}_p$. On considère les applications linéaires $\alpha : \mathbb{F}_p[x]^{\leq 2} \to \mathbb{F}_p[x]^{\leq 1}$ définie par la dérivation, et $\beta : \mathbb{F}_p[x]^{\leq 1} \to \mathbb{F}_p[x]^{\leq 2}$ définie par la multiplication par x. Quelle est la matrice de $\beta \circ \alpha$?

On choisit les bases $(1, x, x^2)$ de $\mathbb{F}_p[x]^{\leq 2}$ et $(1, x)$ de $\mathbb{F}_p[x]^{\leq 1}$.

On a $\alpha(1) = 0$, $\alpha(x) = 1$, $\alpha(x^2) = 2x$ (dans $\mathbb{F}_p$ avec $p > 2$)

$\Rightarrow T(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

De même, $\beta(1) = x$, $\beta(x) = x^2$

$T(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vérifions que $T(\beta) \cdot T(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Pour la 3e colonne, $(\beta \circ \alpha)(x^2) = \beta(\alpha(x^2)) = \beta(2x) = 2x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lorsque $n = m$ et $V = W = U$ est muni d'une base $\mathcal{B}$, on en déduit que le produit de l'anneau $M_n(K)$ correspond via T à la composition des applications linéaires. En particulier, l'image de l'identité $Id : V \to V$ est la *matrice unité* I ou I_n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et tous les autres sont nuls. Elle a la propriété que $A \cdot I = A = I \cdot A$ puisque $\alpha \circ Id = \alpha = Id \circ \alpha$.

Proposition 2.6. *Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors $T : \mathcal{L}(V) \to M_n(K)$ est un isomorphisme d'anneaux.*

En fait, les structures de K-espace vectoriel et d'anneau de $M_n(K)$ sont compatibles dans un sens précis. On dit que $M_n(K)$ est une K-*algèbre*.

3 Matrices particulières

Voyons maintenant quelques matrices dont la forme est si spéciale qu'elle mérite un nom particulier. Une matrice carrée A de taille $n \times n$ est dite *triangulaire supérieure* (respectivement *inférieure*)

si $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ (si $j > i \Rightarrow a_{ij} = 0$)

Si on appelle diagonaux les coefficients a_{ii} de la matrice, cela signifie que les coefficients en-dessous (respectivement au-dessus) de la diagonale sont tous nuls.

Exemple 3.1. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure. En effet,

$a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$

Une matrice qui est à la fois triangulaire supérieure et inférieure est dite *diagonale*. Les seuls coefficients non-nuls d'une telle matrice A sont donc les a_{ii} et on note parfois $\operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ pour une telle matrice. Vue comme matrice d'une application linéaire $\alpha : V \to V$ pour la base $\mathcal{B} = (e_1 \ldots, e_n)$, cela signifie que $\alpha(e_i) = a_{ii}e_i$. Chaque vecteur de base est envoyé sur un multiple de lui-même.
La matrice unité I de $M_n(K)$ est diagonale. C'est $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$.

Exemple 3.2. Considérons la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Alors, si on interprète cette matrice comme celle d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique,

$De_i = 3e_i$ pour $i = 1, 2, 3$

C'est la matrice de l'homothétie de rapport 3 et de centre $(0;0;0)$

Définition 3.3. Soit $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. La matrice $e_{ij} \in M_{m \times n}(K)$ est celle dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1.

Ainsi, si $m = 2$ et $n = 3$, la matrice e_{23} est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nous avons déjà vu que ces matrices forment une base, dite canonique, de $M_{m \times n}(K)$. C'est cette base qui nous a permis de calculer la dimension de $M_{m \times n}(K)$. Que se passe-t-il lorsqu'on multiplie une matrice par e_{ij} ? Puisque le produit se calcule ligne par colonne et que la seule ligne non nulle de e_{ij} est la i-ème

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^e \text{ ligne}$$

$\uparrow j^e$ colonne

$$e_{ij} \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ a_{j1} & \ldots & a_{jn} \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^e \text{ ligne}$$

est la matrice dont

la seule ligne non-nulle est la i^{eme}, constituée de la j^{eme} ligne de A.

Définition 3.4. Soit $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in K$. La *matrice élémentaire* $E_{ij}(\lambda) \in M_n(K)$ est $I + \lambda e_{ij}$.

Que se passe-t-il lorsqu'on multiplie une matrice par E_{ij} ? Soit $A \in M_{m\times n}(K)$ et $E_{ij}(\lambda) = I + \lambda e_{ij} \in M_n(K)$. Alors,

$$E_{ij}(\lambda)\cdot A = (I+\lambda e_{ij})\cdot A = A + \lambda e_{ij}\cdot A$$

C'est la matrice A à laquelle on ajoute λ fois la ligne j à la ligne i.

$$E_{ij}(\lambda) = \begin{array}{cl} & j^e \text{ colonne} \\ \begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow i^e \text{ ligne} \end{array}$$

Définition 3.5. Soit $1 \leq i \leq n$ et $\mu \in K^*$. La *matrice élémentaire* $D_i(\mu) \in M_n(K)$ est $I + (\mu - 1)e_{ii}$. $= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \mu & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

La matrice $D_i(\mu)$ est donc une matrice diagonale dont la seule différence avec I_n est que le $a_{ii} = \mu$.

$D_i(\mu)\cdot A$ donne la matrice A dans laquelle la i^e ligne est multipliée par μ.

Définition 3.6. Soit $1 \leq i < j \leq n$. La *matrice élémentaire* $P_{ij} \in M_n(K)$ est $I - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} + e_{ji}$.

Lorsque $n = 2$, la matrice P_{12} est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En général, pour obtenir P_{ij} à partir de I on échange les lignes i et j. Lorsqu'on multiplie par P_{ij}, on échange les i-ème et j-ème lignes.

Exemple 3.7. Calculons $P_{13}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$

4 Matrices inversibles

Les matrices élémentaires que nous retrouverons à l'heure de résoudre des systèmes d'équations sont des cas particuliers de matrices que l'on peut "inverser". Nous avons vu que $M_n(K)$ est un anneau, mais en général pas un corps, il y certaines matrices qui admettent un inverse et d'autres pas.

Définition 4.1. Soit $A \in M_n(K)$. La matrice A est *inversible* s'il existe une matrice $B \in M_n(K)$ telle que $AB = I = BA$. On note alors $B = A^{-1}$. L'ensemble des matrices inversibles est noté $GL_n(K)$.

$$\cancel{\frac{1}{A}}$$

Nous savons que si l'inverse de A existe, il est unique. Nous savons aussi que $GL_n(K)$ forme un groupe pour la multiplication. En principe, il n'y a pas de raison générale pour que $AB = I$ implique $BA = I$, mais c'est toujours le cas ! Il n'importe donc pas de trouver l'inverse à "droite" ou à "gauche".

Proposition 4.2. *Soit $A, B \in M_n(K)$ telles que $AB = I$. Alors $BA = I$.*

Démonstration. Considérons l'application linéaire $\alpha : M_n(K) \to M_n(K)$ définie par $\alpha(X) = BX$.

Injectivité : Si $BX = 0 \Rightarrow X = IX = (AB)X = A(BX) = A \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}(\alpha) = \{0\}$

Comme les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension injectivité $\Leftrightarrow$ bijectivité

$\Rightarrow$ il existe C telle que $BC = I$

On, $C = IC = (AB)C = A(BC) = A \cdot I = A$.

Donc $C = A$ et $BC = BA = I$.

□

Exemple 4.3. Les matrices $E_{ij}(\lambda)$, $D_i(\mu)$ et P_{ij} sont inversibles.

- inverse de P_{ij} est P_{ij} (on échange 2 fois les lignes i et j)
- inverse de $D_i(\mu)$ est $D_i(\mu^{-1})$ $(\mu \neq 0)$
- inverse de $E_{ij}(\lambda)$ est $E_{ij}(-\lambda)$

Réfléchissons un instant à la signification de l'inversibilité en termes d'applications linéaires plutôt qu'en termes de matrices. Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire et A sa matrice pour un choix de bases. Il n'y a de sens à parler d'inverse que si A est une matrice carrée, si bien que l'on peut supposer que $V = W$ et que l'on choisit deux fois la même base $\mathcal{B}$ de V. Autrement dit, $A = (\alpha)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Théorème 4.4. *La matrice $A = (\alpha)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ est inversible si et seulement si α est un isomorphisme.*

Démonstration. Si α est un isomorphisme, on peut considérer l'application réciproque $\alpha^{-1} : V \to V$. Il s'agit d'une application linéaire (voir les exercices) telle que $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{Id}_V$. Par conséquent, si B est la matrice de α^{-1} dans la base $\mathcal{B}$, alors

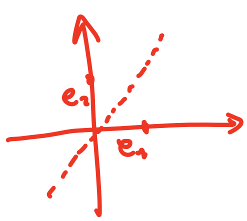
$$BA = (\alpha^{-1})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot (\alpha)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (\alpha^{-1} \circ \alpha)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (\mathrm{Id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I$$

ce qui montre que A est inversible.
Réciproquement, supposons que A est inversible et soit B son inverse. On définit $\beta : V \to V$ comme étant l'unique application linéaire dont la matrice est B dans la base $\mathcal{B}$. Ceci signifie que $\beta(e_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j$ et, par linéarité, si $v = \sum_i \lambda_i e_i$, on a $\beta(v) = \sum_i \sum_j \lambda_i b_{ji} e_j$. Alors $\beta \circ \alpha$ a pour matrice $BA = I$. Autrement dit, $T(\beta \circ \alpha) = T(Id)$. Comme T est un isomorphisme (d'espaces vectoriels et d'anneaux) on en déduit que $\beta \circ \alpha = Id$. De même $\alpha \circ \beta = Id$. $\square$

Exemple 4.5. La symétrie axiale σ d'axe $x = y$ est une application linéaire du plan réel qui est bijective.

De plus, $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}$

Matriciellement, cela signifie que la matrice $T(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est son propre inverse. En effet



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Exemple 4.6. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On aimerait calculer son inverse.

si $\det(A) = ad - bc \neq 0$ alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \frac{1}{\det(A)}$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix} = I_2$$

de même $A^{-1} \cdot A = I_2$

Tu verras l'année prochaine que cela se généralise pour toutes les matrices carrées :

Théorème 4.7. *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.