Série 21

Exercice 1. Vrai ou faux ? Dans chaque cas, donne une justification !

a) La suite $((-1)^n \cdot \frac{1}{n})$ converge.

b) Si la suite (x_n) diverge et la suite (y_n) converge, alors la suite $(x_n \cdot y_n)$ diverge.

c) Pour des suites (x_n) et (y_n) bornées, on a toujours $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

d) Si la suite (x_n) tend vers $-\infty$ et la suite (y_n) converge, alors la suite $(x_n \cdot y_n)$ diverge.

e) Une suite bornée positive converge toujours.

f) Une suite convergente est toujours monotone.

Exercice 2. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes vers x et y respectivement.

a) Montre que la suite $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \cdot y$.

Indication. Utilise la ruse (classique(!)) $|x_n \cdot y_n - x \cdot y| = |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y + x_n \cdot y - x \cdot y|$, ainsi que le fait que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (pourquoi le serait-elle ?), alors il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|x_n| \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montre que si $a, b \in \mathbb{R}$, alors la suite $(ax_n + by_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $ax + by$.

Exercice 3. Démontre par récurrence que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{n^k} = 0$.

Exercice 4. La série harmonique. Nous étudions la suite définie par la formule

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Le but de l'exercice est de voir que cette série tend vers $+\infty$.

a) Calcule $x_2 - x_1$, $x_4 - x_2$ et $x_8 - x_4$.

b) Montre que $x_{2n} - x_n \geq \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Détermine la valeur de l'entier K tel que $x_n \geq 2$ pour tout $n \geq K$.

d) Détermine la valeur de l'entier L tel que $x_n \geq 3$ pour tout $n \geq L$.

e) Détermine la valeur de l'entier M tel que $x_n \geq 4$ pour tout $n \geq M$.

f) Soit $k \in \mathbb{N}$. Détermine la valeur de l'entier N tel que $x_n \geq k$ pour tout $n \geq N$. Ce résultat implique que la suite (x_n) tend vers ∞.

$*$**Exercice 5.** On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} a_0 = \frac{6}{5} \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 3\right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Démontre par récurrence que $a_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Démontre que $a_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Démontre que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et précise si elle est croissante ou décroissante.

d) Démontre que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donne sa limite.

Exercice 6. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}$.

a) Démontre par récurrence que $0 \leq u_n \leq 2$ implique $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

b) Montre que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

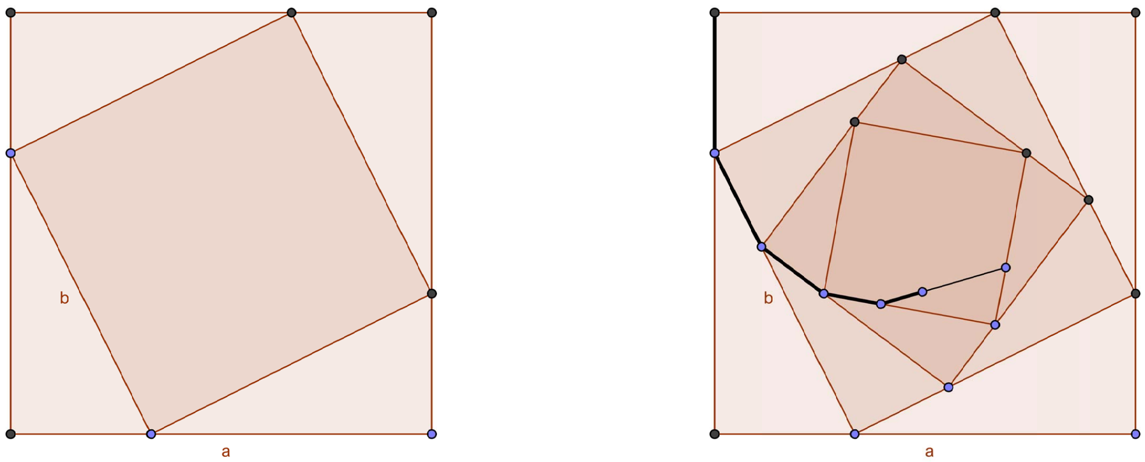
c) Déduis de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donne sa limite.

Exercice 7. On considère un carré de côté 1. On inscrit dans ce carré un cercle, puis dans ce cercle un carré. Puis on recommence encore et encore. Calcule la somme des aires de tous ces carrés. Calcule aussi la somme des aires de tous les disques.

Exercice 8. Dans un carré de côté a, on inscrit un autre carré dont les sommets se trouvent au tiers de la longueur des côtés initiaux (figure de gauche ci-dessous).

a) Calcule la longueur b du côté de ce nouveau carré en fonction de a.

b) On itère indéfiniment cette procédure. Si $a = 1$, calcule la longueur totale de la spirale dont les premiers segments sont tracés dans la figure de droite :



Bonus. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes vers x et y respectivement. Montre que si $y \neq 0$ et $y_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(x_n/y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x/y.