

Série 22

Exercice 1. Soit a un nombre réel. Étudie la convergence de la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en fonction de a . Tu pourras te faire une idée de ce qui se passe en regardant les cas $a = 1/2$, $a = -1/2$, $a = 1$, $a = -1$, $a = 2$ et $a = -2$.

***Exercice 2. Suites récurrentes.** Calcule les quatre premiers termes des suites suivantes. Étudie la convergence et trouve la limite lorsqu'elle existe.

a) $x_n = 2x_{n-1} + 1$ pour $n \geq 1$ et $x_0 = 0$.

b) $x_n = x_{n-1}^2 + 1$ pour $n \geq 1$ et $x_0 = 1/2$.

c) $x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \right)$ pour $n \geq 2$ et $x_1 = 2$.

d) $x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \right)$ pour $n \geq 2$ et $x_1 = 1$.

Exercice 3. Étudie la convergence des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivantes, de terme général donné (en justifiant, bien sûr).

a) $x_n = \frac{2n+3}{n-1}$

c) $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

e) $x_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

b) $x_n = \frac{5-n^2}{10n+1}$

d) $x_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

f) $x_n = \sqrt{n^2 + 6n} - n$

Exercice 4. Autour du nombre e. Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$

(*Indication.* Pour **b**), pose $m = 2n$. Lorsque n tend vers l'infini, m aussi, et inversement. Pour **c**), utilise une idée similaire.)