Exercice 1. L'ensemble $S := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ est majoré car pour tout $y \in S$, on a $y \leq \sqrt{2} < 2 \in \mathbb{Q}$ et donc S est majoré dans $\mathbb{Q}$. Voyons que $\sqrt{2}$ est bien sa borne supérieure (comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, on aura gagné). Supposons par contradiction que S possède une borne supérieure b avec $b < \sqrt{2}$ (pour l'exercice, on espère trouver un tel $b \in \mathbb{Q}$). Par un théorème du cours, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $b < r < \sqrt{2}$. Cependant, cette dernière inégalité signifie que $r \in S$ or cela n'est pas possible car b était supposé être une borne supérieure et donc en particulier un majorant.

Exercice 2. Montrons tout d'abord que l'intervalle $]a; b[$ contient un nombre infini de rationnels. Supposons par contradiction que ce n'est pas le cas. Par conséquent, nous pouvons écrire $]a; b[\cap \mathbb{Q} = \{r_1, \ldots, r_n\}$ avec la propriété que $a < r_1 < \cdots < r_2 < b$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un nombre $q \in \mathbb{Q}$ tel que $a < q < r_1$. On arrive donc à la contradiction que $q \in]a; b[\cap \mathbb{Q}$ mais pourtant $q \notin \{r_1, \ldots, r_n\}$. Ainsi notre hypothèse de départ est fausse et donc $]a; b[$ contient une infinité de rationnels. Étant donné qu'entre deux rationnels il y a toujours un irrationnel, on conclut qu'il y a également une infinité d'irrationels.

Exercice 3.

a) Faux car $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$.

b) Faux car $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$.

c) Vrai, soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux rationnels alors $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \frac{ad+bc}{2bd} \in \mathbb{Q}$.

d) Faux car $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + (-\sqrt{2})) = 0 \in \mathbb{Q}$.

e) Cette assertion est vraie. Supposons le contraire et soit n un entier premier tel que $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, fraction irréductible (c'est-à-dire que p et q sont premiers entre eux). En élevant cette égalité au carré on a $nq^2 = p^2$; donc n divise p^2 et figure forcément dans la décomposition en facteurs premiers de p : $p = np'$. Ceci implique $nq^2 = n^2p'^2$, $q^2 = np'^2$, et donc n divise q^2. Ainsi n figure forcément dans la decomposition en facteurs premiers de q, mais alors p et q ne sont pas premiers entre eux, ce qui est une contradiction.

f) Faux car $\sqrt[3]{8} = 2$.

Exercice 4. Raisonnons par récurrence sur n.

Initialisation. Pour $n = 0$, la somme à gauche de l'égalité vaut 1 ; à droite de l'égalité, on a $\dfrac{1 - x^{1+0}}{1 - x} = 1$ pour tout $x \neq 1$. L'égalité est donc vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité. Supposons que l'égalité est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$:

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+x^{n+1} = (1+x+x^2+\cdots+x^n)+x^{n+1} \overset{\text{réc.}}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}+x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

L'égalité est donc vraie pour $n + 1$ si elle l'est pour n. Par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Notons que pour $n = 1, 2$, cette formule est déjà apparue dans le cadre de la factorisation de polynômes sous la forme :

$$(1 - x) \cdot (1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n) = 1 - x^{n+1}.$$

En prenant l'égalité que l'on vient de démontrer avec $x = \frac{1}{2}$, on obtient

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2.$$

Exercice 5. Appelons $P(n)$ l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$.

Initialisation. Montrons $P(0)$. D'un côté, $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0$. De l'autre, $\dfrac{0(0 + 1)(2 \cdot 0 + 1)}{6} = 0$. Les deux côtés valent 0, l'égalité est démontrée dans ce cas.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie, et montrons $P(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &\overset{P(n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

L'hérédité est démontrée, et $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Dans ce cas on a supposé que $P(k-1)$ et $P(k-2)$ étaient vraies pour en déduire $P(k)$. Pour l'initialisation, il aurait fallu montrer que $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies ce qui n'est bien sûr pas le cas.

Exercice 7. Le problème est que $P(2)$ est utilisée implicitement, une proposition clairement fausse. En d'autres termes : l'initialisation devrait se faire avec $P(2)$.
En effet, récrivons la démonstration proposée de l'hérédité (dont l'idée sera utilisée plus tard en combinatoire) plus explicitement, en supposant que $P(2)$ est vraie(!). Notons C un ensemble de $n+1$ crayons, et formons un sous-ensemble A de n crayons et un sous-ensemble B de 2 crayons tels que $A \cup B = C$. En particulier, $A \cap B$ possède un crayon qui, par $P(n)$, est de la même couleur que tous les crayons de A et, par $P(2)$, est de la même couleur que tous les crayons de B. Donc tous les crayons sont bien de la même couleur que celui de $A \cap B$ (remarquez l'importance de $P(2)$, ainsi que de la comparaison de la couleur de chaque crayon à celle du crayon de référence de $A \cap B$).

Exercice 8.

a)
$$\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{2} = 3+\sqrt{5}.$$
$$\frac{(1-\sqrt{5})^2}{2} = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{2} = 3-\sqrt{5}.$$

b)
$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} = 1 \\ F_2 &= \frac{(1+\sqrt{5})^2-(1-\sqrt{5})^2}{2^2\sqrt{5}} = \frac{1+2\sqrt{5}+5-(1-2\sqrt{5}+5)}{4\sqrt{5}} = 1 \\ F_3 &= \frac{(1+\sqrt{5})^3-(1-\sqrt{5})^3}{2^3\sqrt{5}} = \frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}-(1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5})}{8\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(6+10)}{8\sqrt{5}} = 2.\end{aligned}$$

c) Le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ est appelé le nombre d'or et appelons $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$

Avec cette notation :
$$F_n + F_{n-1} = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n-1} - \varphi'^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{n-1}(1+\varphi) - \varphi'^{n-1}(1+\varphi')}{\sqrt{5}}$$
Par le calcul du point 1 on a que $\varphi^2 = 1+\varphi$ et $\varphi'^2 = 1+\varphi'$ et donc :
$\frac{\varphi^{n-1}\varphi^2 - \varphi'^{n-1}\varphi'^2}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}}{\sqrt{5}} = F_{n+1}$. Fibonacci étudia cette suite de nombres entiers pour modéliser la croissance d'une population de lapins. On commence avec une paire de lapins, au bout d'un mois ils sont adultes et après une gestation d'un mois, la femelle met au monde une deuxième paire de lapins. F_n est le nombre de paires de lapins au bout de n mois. Le nombre de paires au $n+1$ ième mois vaut donc F_n (aucun lapin ne meurt !) + F_{n-1} (chaque paire qui était là un mois avant a eu le temps de s'accoupler). C'est la relation de Fibonacci. Pour connaître le nombre de paires de lapins après 20 mois, on peut utiliser la formule utilisant le nombre d'or plutôt que de devoir itérer 20 fois la relation de récurrence.

Voici les 20 premiers nombres de cette suite :

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}
55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181

d) Comme F_1, F_2 et F_3 sont entiers, et que chaque nombre de Fibonacci est la somme des deux précédents, on en déduit que chaque nombre de Fibonacci est entier.

Exercice 9.

a) Posons $P(n) : n! \geq 2^{n-1}$

- $P(1)$: D'un côté, on a $1! = 1$; de l'autre, on a $2^{1-1} = 1$. Comme $1 \geq 1$, le cas $n = 1$ est vrai. (Notons en passant que le cas $n = 0$ est vrai.)

- $P(n) \implies P(n+1)$: Supposons $n! \geq 2^{n-1}$ vrai, et calculons :

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \overset{P(n)}{\geq} (n+1) \cdot 2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

  où la dernière inégalité vient du fait que pour $n \geq 1$, on a forcément $n + 1 \geq 2$ (mais que cette inégalité n'est pas vraie pour $n = 0$). L'hérédité est vérifiée.

On a donc bien démontré $n! > 2^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

b) Posons $P'(n) : n! > 2^n$.

- $P'(4)$: D'un côté, on a $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; de l'autre, on a $2^4 = 16$. Comme $24 > 16$, le cas $n = 4$ est vrai. (Notons en passant que le cas $n = 3$ est faux.)

- $P'(n) \implies P'(n+1)$: Supposons $n! > 2^n$ vrai, et calculons :

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \overset{P'(n)}{>} (n+1) \cdot 2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

  où la dernière étape vient du fait que pour $n \geq 4$, on a forcément $n + 1 > 2$. L'hérédité est vérifiée.

On a donc bien démontré $n! > 2^n$ pour tout entier $n \geq 4$.

Remarques.

- En **a)**, l'hérédité serait délicate à vérifier si on commençait en $n = 0$ (puisque $n + 1 = 1 \ngeq 2$). Néanmoins, $n! \geq 2^{n-1}$ est vrai pour $n = 0$, puis par **a)** pour $n \geq 1$, donc $n! \geq 2^{n-1}$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si on avait démontré **b)** avant **a)**, on aurait pu conclure $n! > 2^n \geq 2^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 4$. En testant les cas restants $n = 1, 2, 3$:

$$1! \geq 2^0 \text{ (vrai)}, \quad 2! \geq 2^1 \text{ (vrai)}, \quad 3! \geq 2^2 \text{ (vrai)},$$

  on aurait aussi pu conclure que $n! \geq 2^{n-1}$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10.

a) On a $\binom{n}{0} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$, $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = n$, $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n$ et $\binom{n}{n} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$.

b) Pour des entiers n, k avec $n \geq k \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{n!}{(n-k+1)! \cdot (k-1)!} \\ &= \frac{n! \cdot (n-k+1) + n! \cdot k}{(n-k+1)! \cdot k!} = \frac{n! \cdot (n+1) - n! \cdot k + n! \cdot k}{(n+1-k)! \cdot k!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

c) On a simplement opéré un changement de la variable de sommation : par définition,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n-1} ab^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k.$$

d) On démontre le résultat par récurrence.

Initialisation $(n=0)$**.** On a $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = a^0 b^0 = 1$, la formule est vraie dans cas.

Hérédité $(n \rightsquigarrow n+1)$**.** Supposons que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ pour un $n \in \mathbb{N}$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) &\overset{\text{réc.}}{=} \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \Big) \cdot (a+b) \overset{\text{distrib.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \Big(\binom{n}{k} a^{n-k} b^k \cdot (a+b) \Big) \\
&\overset{\text{distrib.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&\overset{\text{a)}}{=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&\overset{\text{c)}}{=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
&\overset{\text{distrib.}}{=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
&\overset{\text{b)}}{=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \overset{\text{a)}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k} b^k.
\end{aligned}$$

Qui donne la formule requise pour $n+1$, et la formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ correspond au terme $a^k b^{n-k}$ dans le développement de $(a+b)^n$, c'est-à-dire de

$$\underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ termes}}.$$

On observe que pour obtenir *un* de ces termes $a^k b^{n-k}$, il faut choisir dans ces n parenthèses $(a+b)$, exactement k fois a (et donc aussi exactement $n-k$ fois b). En énumérant toutes ces possibilités, on obtient exactement le nombre possible de combinaison de k éléments dans un ensemble à n éléments.
En appliquant la formule au cas $a = b = 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

et donc le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n élément est 2^n ; en effet, on doit additionner toutes les manières de prendre des sous-ensembles à 0 éléments parmi n avec toutes les manières de prendre des sous-ensembles à 1 éléments parmi n, et ainsi de suite jusqu'à n.