CORRECTION

1

**Ens: Prof. Friedrich Eisenbrand**
**Algèbre Linéaire Avancée II - MA**
**20 juin 2023**
**Durée: 210 minutes**

# NOM

SCIPER : **SCIPER**

Signature :

**Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 9 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.**

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+2$ points si la réponse est correcte,
  - $0$ point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - $-1$ point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - $0$ point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - $-1$ point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

| choisir une réponse \| select an answer Antwort auswählen | ne PAS choisir une réponse \| NOT select an answer NICHT Antwort auswählen | Corriger une réponse \| Correct an answer Antwort korrigieren |
|---|---|---|

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Correction

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Certaines questions admettent **plusieurs** bonnes réponses.

**Question 1 :** Soit $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ telle que son polynôme caractéristique soit $p_A(x) = x^2 + \alpha^2$, où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Soit $e^A$ l'exponentielle de $A$.
*Formules :* $cos(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, $sin(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.

☐ $e^A = \cos(\alpha) I - \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} A$

■ $e^A = \cos(\alpha) I + \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} A$

☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

☐ $e^A = \sin(\alpha) I + \frac{cos(\alpha)}{\alpha} A$

☐ $e^A = \sin(\alpha) I - \frac{\cos(\alpha)}{\alpha} A$

**Question 2 :** Soit $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \in \mathbb{R}[x]$ le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels qui approxime le mieux les points $P_1 = (0,1), P_2 = (1,2), P_3 = (-1,3), P_4 = (2,5)$. C'est-à-dire

$$p = \arg \min_{\substack{\deg(f)\leq 2 \\ f\in\mathbb{R}[x]}} \sum_{i=1}^{4} |f(x_i) - y_i|^2,$$

où $(x_i, y_i) := P_i$ pour $i = 1, \ldots, 4$.

☐ $\alpha_2 = 1$

■ $\alpha_2 = \frac{5}{4}$

☐ $\alpha_1 = 0$

■ $\alpha_1 = -\frac{11}{20}$

**Question 3 :** Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telle que son polynôme caractéristique est réel (tous ses coefficients sont réels). Quelles assertions sont toujours vraies ?

☐ La matrice $A$ est réelle.

☐ Toutes les valeurs propres de $A$ sont réelles.

■ $\det(A) \in \mathbb{R}$

■ $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{R}$

**Question 4 :** Combien de matrices de $\mathbb{C}^{12\times 12}$ existe-t-il, à changement de base près, telles que

- leur polynôme caractéristique est $p_{car}(x) = (x-1)^2 x^4 (x+2)^6$ et,
- leur polynôme minimal est $p_{min}(x) = (x-1)x^2(x+6)^3$ ?

☐ 3

☐ 2

■ 6

☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

☐ 1

**Question 5 :** Quel est le plus grand diviseur commun $gcd(f, g)$ des polynômes $f(x) = x^4+4x^3+3x^2-4x-4$ et $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3$ dans $\mathbb{R}[x]$?

- ☐ $(x + 1)^2(x - 1)$
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
- ■ $x^2 - 1$
- ☐ $x + 1$
- ☐ $x - 1$

**Question 6 :** Définissons $\lambda_1(M) \geq \cdots \geq \lambda_n(M) \in \mathbb{R}$ les valeurs propres réelles d'une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ deux matrices symétriques, définies positives.
Quelles assertions sont toujours vraies sur les valeurs propres de $A^TBA$ ?

- ■ $\lambda_n(A^TBA) \geq \lambda_n(B) \cdot \lambda_n(A)^2$
- ■ $\lambda_1(A^TBA) \geq \lambda_1(B) \cdot \lambda_n(A)^2$
- ☐ $\lambda_1(A^TBA) \leq \lambda_1(B) \cdot \lambda_n(A)^2$
- ☐ $\lambda_n(A^TBA) \leq \lambda_n(B) \cdot \lambda_n(A)^2$

## Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est peut être fausse).

**Question 7 :** Soit $K$ un corps, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, et $p(x) \in K[x]$ avec coefficient dominant $(-1)^n$.
Il existe une matrice $A \in K^{n \times n}$ telle que $p$ est son polynôme caractéristique.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question 8 :** Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est diagonalisable si et seulement si $A^m$ est diagonalisable, pour un entier $m \geq 1$.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question 9 :** Soit $K$ un corps, $N \in K^{n \times n}$ une matrice nilpotente, et $v \in K^n \setminus \{0\}$ tel que $N^i v \neq 0$ pour $i = 0, \ldots, k$ et $N^{k+1} v = 0$.
Alors les vecteurs $v$, $Nv$, $\ldots, N^k v$ sont linéairement indépendants.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question 10 :** Soit $K$ un corps. Une matrice $A \in K^{n \times n}$ est nilpotente si, pour un entier $i \geq 1$, $\ker(A^i)$ est contenu strictement dans $\ker(A^{i+1})$.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question 11 :** Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique. Si tous les mineurs principaux de $A$ sont strictement positifs, alors tous les mineurs symétriques de $A$ sont strictement positifs.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question 12 :** Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est inversible si et seulement si $A^m$ is inversible, pour un entier $m \geq 1$.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question 13 :** Soit $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subset \mathbb{R}^n$ une base de $\mathbb{R}^n$. Considérons $\{b_1^*, \ldots, b_n^*\} \subset \mathbb{R}^n$ le résultat du procédé de Gram-Schmidt sur $B$ par rapport à un produit scalaire quelconque de $\mathbb{R}^n$ induisant la norme $\|\cdot\|$. Alors, pour tout $i = 2, \ldots, n$, si $b_i$ n'est pas déjà orthogonal aux $b_1, \ldots, b_{i-1}$, on a forcément $\|b_i^*\| < \|b_i\|$.

■ VRAI ☐ FAUX

Correction

**Question 14 :** Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telle que $I + A + A^2 + \cdots + A^m = 0$ pour un certain entier $m \geq 1$.
Alors $A$ est diagonalisable.
*Rappel* : $x^{m+1} - 1$ admet $m+1$ racines complexes distinctes.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question 15 :** Soit $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice nilpotente. Alors il existe une matrice inversible $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $PNP^{-1}$ est un bloc de Jordan.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question 16 :** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Il existe une *unique* matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $f(x) = x^T Ax \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question 17 :** Toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers la matrice nulle possède une valeur propre *réelle* $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $|\lambda| < 1$.

☐ VRAI ■ FAUX

**Question 18 :** Soit $K$ un corps, et $a, b, c \in K[x]$ des polynômes à coefficients dans $K$. Si $a$ divise le produit $b \cdot c$, et que $gcd(a, b) = 1$, alors $a$ divise $c$.

■ VRAI ☐ FAUX

**Question 19 :** Soit $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que $B$ est inversible.
Alors $AB$ et $BA$ admettent la même forme normale de Jordan, à permutation des blocs près.

■ VRAI ☐ FAUX

## Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 20:** *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ■10 *Réservé au correcteur*

Considérons la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^{n \times n}$ par $\langle A, B \rangle := \mathrm{Tr}(A^T B)$. Posons également le groupe orthogonal $\mathcal{O}(n) := \{S \in \mathbb{R}^{n \times n} : S^T S = I\}$.

(a) (3 points) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire de $\mathbb{R}^{n \times n}$ qui induit la norme de Frobenius $\|\cdot\|_F$.

(b) (2 points) En déduire que la norme de Frobenius est invariante par action à gauche et à droite du groupe orthogonal. C'est-à-dire, montrer que

$$\|SA\|_F = \|AS\|_F = \|A\|_F \qquad \forall S \in \mathcal{O}(n).$$

En particulier, on a $\|S\|_F^2 = n$ pour tout $S \in \mathcal{O}(n)$.

(c) (1 point) En déduire que, pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, minimiser $\|A - S\|_F^2$ sur $S \in \mathcal{O}(n)$ est équivalent à maximiser $\langle A, S \rangle$ sur $S \in \mathcal{O}(n)$.

(d) (2 points) Montrer que, si $\Sigma \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ est diagonale à coefficients positifs ou nuls, alors l'identité $I \in \mathcal{O}(n)$ maximise la quantité $\langle \Sigma, S \rangle$, $S \in \mathcal{O}(n)$.

*Indice* : montrer d'abord que $|S_{ii}| \leq 1$ pour $i = 1, \ldots, n$.

(e) (2 points) Soit $A = U \Sigma V$ la décomposition en valeurs singulières d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quelconque. Décrire les propriétés de $U, \Sigma$ et $V$ données par le théorème de décomposition.

Conclure, à l'aide des questions précédentes, que $UV$ est une des matrices orthogonales les plus proches de $A$. C'est-à-dire,

$$UV \in \arg \min_{S \in \mathcal{O}(n)} \|A - S\|_F .$$

**Question 21:** *Cette question est notée sur 10 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ■ 10 *Réservé au correcteur*

Soit $K$ un corps, $A \in K^{n\times n}$ et $f(x,y) := x^T Ay$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de $V = K^n$.

(a) (1 point) Montrer que $\ker(A) = \{0\}$, et donc que $A$ est de rang plein.

Considérons désormais un sous-espace quelconque $W$ de $V$ de dimension $m$. Posons $w_1, \ldots, w_m$ une base de $W$. Définissons l'application $\phi : V \to K^m$ par $\phi(v)_i := f(v, w_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, m$.

(b) (3 points) Montrer que $\phi(v) = QAv$, pour une matrice $Q \in K^{m\times n}$ de rang $m$.

(c) (2 points) Montrer que $\ker(\phi) = W^\perp := \{v \in V \mid f(v,w) = 0 \ \forall w \in W\}$, et que rang(QA) = m.

(d) (1 point) En déduire que $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$.

(e) (2 point) Montrer que $W \cap W^\perp = \{0\}$ est équivalent au fait que $f_{|W\times W}$ soit non dégénérée.

(f) (1 point) Conclure que $V = W \oplus W^\perp$ si et seulement si $f_{|W\times W}$ est non dégénérée.

**Question 22:** *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6 *Réservé au correcteur*

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice non nulle. Posons $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ les valeurs singulières non nulles de $A$, et $\|\cdot\|_F$ la norme de Frobenius.

(a) (1 point) Montrer que $r \geq 1$ ($A$ admet au moins une valeur singulière non nulle).

(b) (3 points) Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$, on a

$$\sqrt{k} \cdot \sigma_k \leq \|A\|_F \leq \sqrt{r} \cdot \sigma_1.$$

(c) (2 points) En déduire qu'il existe une matrice $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rang inférieur ou égal à $k$ telle que la plus grande valeur singulière de $(A - B)$ est bornée supérieurement par $\|A\|_F / \sqrt{k+1}$.

**Question 23:** *Cette question est notée sur 6 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ 6 *Réservé au correcteur*

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et soit

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$$

une factorisation de $A$ telle que $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est orthogonale et $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

(a) (2 points) Montrer que l'ensemble $\{u_1, \dots, u_n\}$ forme une base orthonormale de vecteurs propres de $A$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

(b) (4 points) Montrer que, pour tout $1 \leq \ell < n$, on a

$$\max_{\substack{x \in S^{n-1} \\ x\perp u_1, \dots, x \perp u_\ell}} x^T A x = \lambda_{\ell+1},$$

et que $u_{\ell+1}$ est une solution optimale.