Cours Euler 3ème année

Test 4 - Algèbre linéaire II 16.03.22

Nom: ______________________ Prénom: ______________________

Le test dure 90 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire sur une feuille séparée.

Exercice 1. *(12 points)*

a) Déterminer un espace vectoriel isomorphe à $M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$

b) Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Montrer que le noyau de α est un sous-espace vectoriel de V.

c) Enoncer le théorème du rang.

d) Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire telle que $\dim V = \dim W < \infty$. Montrer que α est injective si et seulement si α est surjective.

Exercice 2. *(12 points)*

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application donnée par

$$f(x; y; z) = (x + 2y - 3z; -x + 2y + z)$$

a) Montrer que f est une application linéaire.

b) Déterminer une base du noyau et sa dimension.

c) Déterminer le rang de f.

d) Est-ce que l'application est injective, surjective, bijective ? Justifier.

Exercice 3. *(10 points)*

Discuter en fonction de k et résoudre le système :

$$\begin{cases} x - 3y + z = -3 \\ -2x + 3ky + z = 3k \\ -x + 3y - kz = k + 1 \end{cases}$$

Exercice 4. *(11 points)*

On considère une application linéaire $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice A associée à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de A.

b) Déterminer les espaces propres associés à chaque valeur propre.

c) Montrer que la matrice P qui satisfait $P^{-1}AP = D$ peut s'écrire sous la forme

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et déterminer la matrice diagonale D qui correspond.

d) Caractériser géométriquement l'application α.

Exercice 5. *(7 points)*

Soit $\alpha : \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ l'application définie par

$$\alpha(P) = (x+1) \cdot P$$

a) Déterminer la matrice de α associées aux bases canoniques $(x^2; x; 1)$ et $(x^3; x^2; x; 1)$ de $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ et $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$.

b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (1 - x; x^2 - 3x; 2 + x^2)$ forme une base de $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.

c) Soit $\mathcal{C} = (1; x^3; x; x^2)$ une base de $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$. Donner la matrice de α par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 6. *(8 points)*

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui associe à tout vecteur $\overrightarrow{v}$ sa projection $f(\overrightarrow{v})$ sur la droite $2x - y = 0$ parallèlement à la droite $x + y = 0$.
Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique.

Exercice 7. *(4 points)*

Démontrer que si $f : V \to V$ est une application linéaire telle que $f \circ f = Id$, alors 1 et -1 sont les seules valeurs propres possibles.