Corrigé série 17

Exercice 1 (10 points)

On commence par remarquer que la liste

$$(1+x, 1-x) \tag{1}$$

est une base de $\mathbb{R}[x]^{\leq 1}$. En effet, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$ax + b = \frac{a+b}{2}(1+x) + \frac{b-a}{2}(1-x), \tag{2}$$

donc la liste (1) engendre l'espace $\mathbb{R}[x]^{\leq 1}$, ce qui est suffisant de vérifier comme on sait que

$$\mathrm{Dim}(\mathbb{R}[x]^{\leq 1}) = 2,$$

et donc toute liste de deux vecteurs engendrant $\mathbb{R}[x]^{\leq 1}$ sera forcément une base de cette espace.
L'identité (2) nous suggère le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}[x]^{\leq 1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & ax+b & \longmapsto & (\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}). \end{array}$$

Il s'agit simplement du morphisme de décomposition en coordonnées dans la base (1). On peut facilement vérifier que ϕ est bien un morphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Pour voir sa bijectivité (et pouvoir conclure qu'il s'agit d'un *iso*morphisme), il suffit, pour des raisons de dimension, de vérifier l'injectivité *ou* la surjectivité de ϕ.
Pour voir l'injectivité, on remarque que le système

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 0 \\ \frac{b-a}{2} = 0 \end{cases}$$

a pour seule solution $(a, b) = (0, 0)$.
Remarque : Connaître uniquement les images des éléments d'une base d'un espace vectoriel est suffisant pour connaître complètement le morphisme que l'on définit sur l'espace vectoriel en question. Dans cet exemple, une autre façon de construire ϕ est d'imposer

$$\phi(1+x) = (1,0) \qquad \text{et} \qquad \phi(1-x) = (0,1).$$

Exercice 2 (10 points)

a) On prend la base

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \tag{3}$$

pour $\mathrm{M}_2(C)$ et $\{1\}$ pour $\mathbb{C}$. Dans ces deux bases (en respectant l'ordre donné), la matrice de l'application Tr devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

b) L'équation

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$$

est équivalente à

$$a + d = 0.$$

Ainsi, le noyau de Tr est l'espace

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})\right\}.$$

c) La linéarité de α découle des propriétés du produit matriciel. Sa matrice est

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}. \tag{5}$$

d) Comme α et Tr sont deux applications linéaires, leur composition est aussi linéaire. Par exemple, si X et Y sont dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, alors, en utilisant successivement l'additivité de α et de Tr, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} \circ \alpha(X+Y) &= \mathrm{Tr}(\alpha(X+Y)) = \mathrm{Tr}(\alpha(X) + \alpha(Y)) \\ &= \mathrm{Tr}(\alpha(X)) + \mathrm{Tr}(\alpha(Y)) = \mathrm{Tr} \circ \alpha(X) + \mathrm{Tr} \circ \alpha(Y), \end{aligned}$$

ce qui montre l'additivité de $\mathrm{Tr} \circ \alpha$. On procède de même pour la linéarité.

Pour trouver la matrice de $\mathrm{Tr} \circ \alpha$, on utilise le fait que la matrice de cette composée est égal au produit des matrices de Tr et α (la définition du produit matriciel a été choisie pour que cela soit vrai !)

On calcule le produit de (4) et (5) pour trouver

$$\begin{pmatrix} a & c & b & d \end{pmatrix}. \tag{6}$$

e) On rappelle que le rang de β est la dimension de son image, donc

$$\mathrm{Rang}(\beta) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}\beta).$$

Comme

$$\mathrm{Im}(\beta) \subseteq \mathbb{C},$$

le rang de β sera 0 ou 1. En utilisant (6), on a directement que l'image par β du premier vecteur de la base canonique de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ donné en (3) est $a \in \mathbb{C}$. Ainsi, si $a \neq 0$, alors $\mathrm{Im}(\beta) = \mathbb{C}$. En procédant de même avec les autres vecteurs de base, on voit que

$$\mathrm{Rang}(\beta) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0).$$

Dans tous les autres cas, le rang de β est 1.

Exercice 3 (10 points)

a) Comme $\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^3) = 3$, il suffit de vérifier que la liste proposée engendre $\mathbb{R}^3$ *ou* est $\mathbb{R}$-linéairement indépendante. Pour voir que la liste engendre $\mathbb{R}^3$, on remarque que, pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x + 2y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (z - y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) On applique la même stratégie que dans le point précédent. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

c) Un calcul direct donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Un calcul direct donne, en utilisant la décomposition donnée en (7),

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (10 points)

a) Vrai. Cela découle du fait qu'on peut choisir comme $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$

$$(1, i),$$

ce qui permet de construire un isomorphisme avec $\mathbb{R}^2$. Par exemple, on peut définir les images dans $\mathbb{R}^2$ des éléments de cette base comme

$$1 \mapsto (1; 0) \qquad \text{et} \qquad i \mapsto (0; 1),$$

pour finalement obtenir le morphisme

$$a + bi \mapsto (a; b)$$

de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}^2$. Vérifier qu'il s'agit bien d'un isomorphisme est immédiat.

b) Faux. Si un isomorphisme devait exister, alors les deux espaces vectoriels considérés devraient, en particulier, avoir même cardinalité. Or, on remarque que

$$\#\mathrm{M}_2(\mathbb{F}_7) = 7^4 \qquad \text{et} \qquad \#\mathbb{F}_{11}[x]^{\leq 3} = 11^4.$$

c) Vrai. Nommons a l'application linéaire $K \to K^n$ représentée par la matrice A, et nommons b l'application linéaire $K^n \to K$ représentée par B. Le rang de $a \circ b$ est

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(a \circ b)).$$

Or,

$$\mathrm{Im}(a \circ b) = (a \circ b)(K^n) = a(b(K^n)) \subseteq a(K), \tag{8}$$

comme

$$b(K^n) \subseteq K.$$

Comme $a(1)$ engendre l'espace vectoriel $a(K)$, on a que $\mathrm{Dim}(a(K)) \leq 1$, ce qui implique, par (8), que

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(a \circ b)) \leq 1.$$

d) Faux. On donne un contre-exemple. On définit les morphismes α et β en donnant l'image des éléments de bases (canoniques).

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & 1 & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{c} \beta: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto 0, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto 1. \end{array}$$

On peut vérifier que $\beta \circ \alpha = 0$, mais $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

e) Faux. En travaillant avec les morphismes plutôt qu'avec les matrices, supposons que l'application de dérivation d ait un inverse e. Alors,

$$1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}[x]^{\leq 4}}(1) = (e \circ d)(1) = e(d(1)) = e(0) = 0,$$

où $\mathrm{id}_{\mathbb{R}[x]^{\leq 4}}$ est l'identité sur $\mathbb{R}[x]^{\leq 4}$.

Exercice 5 (10 points)

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) On calcule

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux équations

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

conduisent (respectivement) aux deux ensembles de solutions

$$\{u(-2,1,1,0) + v(-3,2,0,1) + (-1,2,0,0) \mid u, v \in \mathbb{R}\}, \quad \text{et}$$
$$\{u(-2,1,1,0) + v(-3,2,0,1) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$$

c) Comme

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \left(A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

on a

$$\alpha(1,2,2,-1) = 2\alpha(1,1,0,0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle \alpha(1,2,2,-1), \alpha(1,1,0,0) \rangle &= \langle 2\alpha(1,1,0,0), \alpha(1,1,0,0) \rangle \\ &= \langle \alpha(1,1,0,0) \rangle = \{v(2,3,0) \mid v \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Exercice 6 (5 points)

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Du point précédent, on a que

$$\mathrm{Im}(\beta \circ \alpha) = \{x(0,7) + y(0,1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{(0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Rang}(\beta \circ \alpha) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(\beta \circ \alpha)) = 1.$$

Exercice 7 (5 points)

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) On voit par la forme explicite de BA donnée dans le point précédent que

$$\mathrm{Rang}(\beta \circ \alpha) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(\beta \circ \alpha)) = 2.$$

Exercice 8 (10 points)

A. La matrice A est inversible comme la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est envoyée, par l'application représentée par la matrice, sur une autre base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, $\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(A)) = 3$, et par le théorème du rang,

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(A)) = 0,$$

ce qui implique que A est (en tant qu'application) injectif et surjectif, possédant donc un inverse.

B. L'image de l'application représentée par B est de dimension 1. Ainsi, par le théorème du rang, le kernel de B est non-trivial, donc il existe $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $Bv = 0$. Si B admettait un inverse B^{-1}, alors on aurait

$$v = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} v = B^{-1}Bv = B^{-1}0 = 0.$$

C. L'image de l'application représentée par C est de dimension 2. Ainsi, par le théorème du rang, on a que le kernel de C est non-trivial. Par un raisonnement similaire à celui du point précédent, on voit que C ne peut pas admettre d'inverse.

D. La matrice D a la même propriété que la matrice A d'envoyer la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sur une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, par le même raisonnement que pour la matrice A, la matrice D admet un inverse.

Exercice 9 (10 points)

On commence par vérifier que α^{-1} est K-linéaire. Soient $u, v \in V$ et $\lambda \in K$. On a

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha^{-1}(u+v)) &= u + v \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(u)) + \alpha(\alpha^{-1}(v)) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)). \end{aligned}$$

En utilisant l'injectivité de α, on obtient

$$\alpha^{-1}(u+v) = \alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v).$$

De même, comme

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha^{-1}(\lambda u)) &= \lambda u \\ &= \lambda(\alpha(\alpha^{-1}(u))) \\ &= \alpha(\lambda(\alpha^{-1}(u))), \end{aligned}$$

on obtient, par l'injectivité de α,

$$\alpha^{-1}(\lambda u) = \lambda(\alpha^{-1}(u)).$$

Enfin, il est immédiat que l'application linéaire α^{-1} est un isomorphisme d'espaces vectoriels comme elle est bijective.

Exercice 10 (10 points)
Dans ce qui suit, on utilisera l'égalité

$$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il},$$

où δ_{xy} est le *symbole de Kronecker* défini par

$$\delta_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } \; x = y, \\ 0 & \text{si } \; x \neq y. \end{cases}$$

a) On rappelle que dans la notation "$E_{ij}(\lambda)$" on suppose implicitement $i \neq j$. Ainsi,

$$\begin{aligned} E_{ij}(\lambda)E_{ij}(\mu) &= (I + \lambda e_{ij})(I + \mu e_{ij}) \\ &= I + \lambda e_{ij} + \mu e_{ij} + \underbrace{\delta_{ji}}_{=0} \lambda\mu e_{ij} \\ &= I + (\lambda + \mu)e_{ij} = E_{ij}(\lambda + \mu). \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned} &E_{ij}(1)E_{ij}(-1) = E_{ij}(0) = I \qquad \text{et} \\ &E_{ij}(-1)E_{ij}(1) = E_{ij}(0) = I. \end{aligned}$$

b) Ici, l'écriture suppose implicitement $i \neq j$ et $j \neq k$. On calcule

$$\begin{aligned} E_{ij}(\lambda)E_{jk}(1)E_{ij}(-\lambda)E_{jk}(-1) &= (I + \lambda e_{ij})(I + e_{jk})(I - \lambda e_{ij})(I - e_{jk}) \\ &= (I + \lambda e_{ij} + e_{jk} + \lambda e_{ik})(I - e_{jk} - \lambda e_{ij} + \lambda e_{ik}) \\ &= I - e_{jk} - \lambda e_{ij} + \lambda e_{ik} \\ &\quad + \lambda e_{ij} - \lambda e_{ik} + 0 + 0 \\ &\quad + e_{jk} + 0 - \lambda\delta_{ik}e_{jj} + \lambda\delta_{ik}e_{jk} \\ &\quad + \lambda e_{ik} + 0 - \lambda^2\delta_{ik}e_{ij} + \lambda^2\delta_{ik}e_{ik} \\ &= I + \lambda e_{ik} + \delta_{ik}(\lambda e_{jj} + \lambda e_{jk} - \lambda^2 e_{ij} + \lambda^2 e_{ik}). \end{aligned}$$

Ainsi, si $i \neq k$, alors

$$E_{ij}(\lambda)E_{jk}(1)E_{ij}(-\lambda)E_{jk}(-1) = E_{ik}(\lambda).$$

c) Notons $A = (a_{mn})$, alors

$$AE_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} + \lambda a_{1i} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2j} + \lambda a_{2i} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} + \lambda a_{ni} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

d)

$$AD_i(\mu) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & \mu a_{1i} & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & \mu a_{2i} & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & \mu a_{ni} & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

e) L'écriture suppose que $i < j$. La matrice AP_{ij} est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & a_{1j} & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1i} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & a_{2j} & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2i} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & a_{nj} & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{ni} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 (10 points)

Si A et B possèdent chacun un inverse, alors $A^{-1}B^{-1}$ est un inverse de BA. En effet,

$$(A^{-1}B^{-1})(BA) = I \qquad \text{et} \qquad (BA)(A^{-1}B^{-1}) = I.$$

Réciproquement, supposons que BA possède un inverse C. Soient $\alpha : K^n \to K^n$ et $\beta : K^n \to K^n$ sont les morphismes représentés (respectivement) par A et B. Alors, pour avoir que A et B sont inversibles, il nous faut voir que α et β sont inversibles. Notons que comme BA est inversible, l'application $\beta \circ \alpha$ est bijective.

Commençons par voir que α est injectif. Si $\alpha(k) = 0$ pour un $k \in K^n$, alors $\beta(\alpha(k)) = 0$. Comme $\beta \circ \alpha$ est injective, cela implique que $k = 0$. Ainsi, $\ker(\alpha) = \{0\}$ et donc α est injectif. Par une proposition du cours, puisque les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension, ceci implique directement que α est surjectif.

Voyons maintenant que β est surjectif. Soit $k \in K^n$. Comme $\beta \circ \alpha$ est surjectif, il existe $x \in K^n$ tel que $\beta \circ \alpha(x) = k$. Ceci implique que $\alpha(x)$ est une préimage par β de k, et donc que β est surjectif. Comme les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension, ceci implique directement que β est injectif.