Corrigé série 18

Exercice 1 (5 points)

Pour obtenir une matrice échelonnée, on effectue les étapes suivantes :

$$A \rightsquigarrow_{P_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow_{E_{31}(-1)E_{21}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow_{P_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour avoir la forme *échelonnée réduite*,

$$\rightsquigarrow_{E_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow_{E_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (10 points)

On augmente la matrice A de l'exercice précédent du vecteur colonne $(9, 1, 6)$, puis on échelonne à nouveau la matrice pour arriver, par des calculs en tout points similaires, à

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice correspond au système

$$\begin{cases} x + 2y - t = 1 \\ z + 3t = 0 \\ u = 5 \end{cases}$$

Ainsi, u est complètement fixé. De plus, on remarque, qu'une fois t et y choisis, x et z sont aussi déterminés. On peut donc laisser t et y varier comme paramètres. Le vecteur (x, y, z, t, u) de solutions devient alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2y + t \\ y \\ -3t \\ t \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (10 points)

Pour le premier système, on peut adopter une stratégie similaire à celle de l'exercice . On trouve l'unique solution

$$x = 11, \quad y = -18, \quad z = 30.$$

Pour le deuxième système, on utilise la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} -1 & 13 & -7 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow_{E_{31}(1)E_{21}(2)} \begin{pmatrix} -1 & 13 & -7 & 0 \\ 0 & 25 & -10 & -1 \\ 0 & 15 & -6 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow_{D_3\left(\frac{1}{3}\right)} \begin{pmatrix} -1 & 13 & -7 & 0 \\ 0 & 25 & -10 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 1/3 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow_{E_{23}(-5)} \begin{pmatrix} -1 & 13 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8/3 \\ 0 & 5 & -2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice correspond au système

$$\begin{cases} -x + 13y - 7z = 0 \\ 0 = -8/3 \\ 5y - 2z = 1/3 \end{cases}$$

qui n'a pas de solution.

Exercice 4 (10 points)

a) On prend le premier vecteur de la base de $\mathcal{B}$ et on lui applique l'identité, puis on écrit le résultat comme combinaison linéaire des éléments de la base canonique :
$\mathrm{id}(g_1) = g_1 = (1; 0; 0) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \Rightarrow$ les coefficients trouvés donne la première colonne de la matrice cherchée. On fait de la même manière pour les deux autres vecteurs de la base $\mathcal{B}$ et on obtient la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Comme au point a), on applique l'identité sur les vecteurs de la base canonique et on écrit le résultat comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{C}$. Par exemple avec le premier vecteur : $\mathrm{id}(1; 0) = (1; 0) = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2$ On obtient la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) On commence par calculer la matrice de f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. On a $f(1;0;0) = (1;1) = 1\cdot(1;0) + 1\cdot(0;1)$ et la première colonne de la matrice est donnée par les coefficients trouvés. On fait de même avec les deux autres vecteurs de la base canonique et on obtient la matrice

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il nous reste à effectuer le calcul

$$B = P \cdot M_f \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (10 points)

a) Vrai. Une matrice de changement de bases est toujours inversible. Or, seules les matrices carrées peuvent être inversibles.

b) Vrai. Comme la cardinalité de K^n est finie, il n'existe qu'un nombre fini de vecteurs, et donc un nombre fini [1] de bases sur K^n.

Ainsi, si C est le nombre de bases sur K^n, alors le nombre de matrices de changement de bases sera borné [2] par C^2. En particulier, c'est une quantité finie.

Un autre argument plus simple est de remarquer qu'il n'y a qu'un nombre fini de matrices dans $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$, et donc, *a fortiori*, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de matrices de changements de bases dans $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$.

c) Faux. Soit $\alpha : \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^2$ une application linéaire représentée par une matrice $A \in \mathrm{M}_{2\times 7}(\mathbb{C})$. On sait que le rang de A est

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(\alpha) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(\alpha)) \leq \mathrm{Dim}(\mathbb{C}^2) = 2.$$

d) Vrai. Par exemple, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Un argument d'analyse combinatoire montre qu'on peut borner ce nombre par

$$\#K^n \cdot (\#K^n - 1)\cdots(\#K^n - (n+1)) = \frac{\#K^n!}{n!}.$$

2. Borné, mais pas égal ! Par exemple, la matrice identité envoie n'importe quelle base sur elle-même.

e) Faux. Pour le produit matriciel, il n'y a *pas* l'implication

$$AB = 0 \quad \Rightarrow \quad BA = 0.$$

On peut "s'inspirer" de ce fait pour essayer de construire un contre-exemple.

Appelons (e_1, e_2) le base canonique de $\mathbb{R}^5$ et $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On définit α et β en donnant les images des bases choisies

$$\begin{aligned} &\alpha(f_1) = 0, \quad \text{et} \quad \alpha(f_i) = e_1, \quad \text{pour} \quad i = 2, \dots, 5, \\ &\beta(e_1) = f_1 \quad \text{et} \quad \beta(e_2) = f_1. \end{aligned}$$

On peut vérifier que $\alpha \circ \beta = 0$ et $\beta \circ \alpha \neq 0$, donc

$$AB = 0 \quad \text{et} \quad BA \neq 0,$$

ce qui implique, en particulier, que AB et BA n'ont pas le même rang.

f) Faux. La matrice A est échelonnée, mais pas réduite (on devrait avoir un 0 au milieu de la première ligne).

Exercice 6 (10 points)

On utilise la méthode de Gauss :

$$A \rightsquigarrow_{E_{31}(-a^2)E_{21}(-a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow_{E_{32}(-(b+a))} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a les cas suivants :

(a) Si $\#\{a, b, c\} = 3$, alors le rang de A est 3.

(b) Si $\#\{a, b, c\} = 2$, alors le rang de A est 2.

(c) Si $\#\{a, b, c\} = 1$, alors le rang de A est 1.

Exercice 7 (10 points)

Soit $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme de W (ici, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$). La condition sur $w(x)$ devient (après quelques calculs)

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 19a + 5b + c = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -19 \\ 18 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la dimension de W est 2.
Vérifier que $p(x)$ est dans W est immédiat.
Enfin, la liste

$$\{p(x),\ x^2 - 5x + 4\}$$

est une base de W dans laquelle $p(x)$ s'écrit très facilement.

Exercice 8 (10 points)

a) On utilise la méthode de Gauss sur la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 2 & 16 \\ 6 & -3 & 0 & 3 & 24 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \leadsto_{D_1(\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/4 & 1/2 & 4 \\ 6 & -3 & 0 & 3 & 24 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \leadsto_{E_{31}(-2)E_{21}(-6)} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/4 & 1/2 & 4 \\ 0 & 0 & -9/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto_{D_1(-\frac{2}{9})} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/4 & 1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leadsto_{E_{32}(-\frac{3}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/4 & 1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient le système d'équations

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}t + \frac{1}{2}u = 4 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}u + 4 \\ t = 0 \end{cases}$$

et on trouve la solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) On fait les même étapes qu'au point a) et on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/4 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-6 \end{pmatrix}.$$

On remarque que le système n'a de solution que si $a = 6$, et dans ce cas on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}t + \frac{1}{2}u = \frac{5}{2} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}u + 2 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

et on trouve la solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 (10 points)

Commençons par remarquer que $x = 0$ sera *toujours* une solution de $Ax = 0$, ainsi si cette équation admet une *unique* solution, alors cette solution sera 0.

On montre maintenant l'équivalence :

Partie "(1) $\Rightarrow$ (2)" : Si $Ax = 0$ a une unique solution, alors $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, et, par le théorème du rang, $\mathrm{Im}(A) = K^n$, donc A est surjective. Ainsi, pour tout $b \in K^n$, il existe $x \in K^n$ tel que

$$Ax = b.$$

Partie "(2) $\Rightarrow$ (1)" : On démontre la contraposée[3]. Soient x_1 et x_2 dans K^n distincts tels que

$$Ax_1 = 0 \quad \text{et} \quad Ax_2 = 0,$$

alors le noyau de A n'est pas trivial, et, par le théorème du rang, on a

$$\mathrm{Im}(A) \subsetneq K^n,$$

donc il existe $b \in K^n$ tel que $b \notin \mathrm{Im}(A)$. Cela peut encore être reformulé comme : il existe $b \in K^n$ tel que $Ax = b$ n'a pas de solution.

Exercice 10 (10 points)

a)

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Si la solution de $Ax = 0$ n'est pas unique, alors il existe $b \in K^n$ tel que $Ax = b$ n'a pas de solution.

b) Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ dans $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Soit encore $\lambda \in K$. On vérifie que

$$\begin{aligned}((A+B)^t)_{ij} &= (A+B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij}, \quad \text{et}\\ ((\lambda A)^t)_{ij} &= (\lambda A)_{ji} = \lambda a_{ji} = \lambda (A^t)_{ij}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(A+B)^t = A^t + B^t \quad \text{et} \quad (\lambda A)^t = \lambda(A^t).$$

c) On a

$$((A^t)^t)_{ij} = (A^t)_{ji} = A_{ij}.$$

d) Comme la transposition "est son propre inverse" (par le point précédent), le morphisme qu'elle induit entre $\mathrm{M}_{n\times m}(K)$ et $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ est bijectif.

e) On commence par remarquer que si A et B sont dans W, alors

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$$

et, pour tout $\lambda \in K$,

$$(\lambda A)^t = \lambda(A^t) = \lambda A.$$

Ces deux vérifications montrent que W est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(K)$.
L'équation $A^t = A$ est équivalente à

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \text{pour tout} \ \ i, j.$$

Les matrices de W auront donc la forme (pour $n = 4$)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b & c \\ a & \lambda_2 & d & e \\ b & d & \lambda_3 & f \\ c & e & f & \lambda_4 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Ainsi, le dimension de W, pour $n = 4$, est 10.
Pour calculer cette dimension dans le cas n quelconque, on remarque que le nombre de paramètres à sommer est les n de la diagonale et $1+2+\cdots+(n-1)$ pour le demi-triangle supérieur de la matrice.
Ainsi,

$$\mathrm{Dim}(W) = n + \sum_{i=1}^{n-1} i = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

f) Pour $n = 4$, les matrices de U auront la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b & c \\ 0 & \lambda_2 & d & e \\ 0 & 0 & \lambda_3 & f \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Sa dimension est donc 10. De plus, on peut faire le même argument de comptage que pour le point précédent et trouver que la dimension de U dans le cas général est

$$\mathrm{Dim}(U) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Une base explicite de U, pour le cas $n = 4$, est

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right. \tag{3}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

g) En comparant les formes (1) et (2), on voit que les matrices dans $U \cap W$ sont précisément les matrices diagonales.

Une base de $U \cap W$ est donnée par les quatre premières matrices de la liste (3).

De manière générale, la dimension de $U \cap W$ est n.

h) Oui. Par exemple, dans le cas $n = 4$, on a

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha & \beta & \gamma \\ a & \lambda_2 & \delta & \epsilon \\ b & d & \lambda_3 & \zeta \\ c & e & f & \lambda_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b & c \\ a & \lambda_2 & d & e \\ b & d & \lambda_3 & f \\ c & e & f & \lambda_4 \end{pmatrix}}_{\in W} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \alpha - a & \beta - b & \gamma - c \\ 0 & 0 & \delta - d & \epsilon - e \\ 0 & 0 & 0 & \zeta - f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in U},$$

ce qui montre que toute matrice de $\mathrm{M}_4(K)$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice de W et d'une matrice de U.

Exercice 11 (10 points)
Soit $f : K^N \to K^M$ un morphisme linéaire et $A \in \mathrm{M}_{M\times N}(K)$ sa matrice associée par rapport aux bases canoniques. Soit $(k_1, \dots, k_n) \subseteq K^N$ une base du noyau de f que l'on complète en choisissant des vecteurs $b_1, \dots, b_l \in K^N$ pour avoir une base $\mathcal{B}$ de K^N :

$$\mathcal{B} = (b_1,\, \dots,\, b_l,\, k_1,\, \dots,\, k_n), \quad \text{avec} \quad n + l = N.$$

Par le théorème du rang,

$$n + \mathrm{Rang}(A) = N,$$

et donc, en comparant les deux dernières équations,

$$l = \mathrm{Rang}(A). \tag{4}$$

Nommons $c_1, \dots, c_l$ les images par f de $b_1, \dots, b_l$, c'est-à-dire

$$c_i = f(b_i) \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, l.$$

On peut vérifier que les c_i sont linéairement indépendants. En effets, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ satisfont

$$\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_l c_l = 0,$$

alors on a

$$f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_l b_l) = 0,$$

ce qui implique

$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_l b_l \in \ker(f),$$

et, par construction de $\mathcal{B}$, cela n'est possible que si tous les λ_i sont zéro.
On peut donc compléter les c_i pour avoir une base $\mathcal{C}$ de K^M :

$$\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_l, \underbrace{*, \dots, *}_{M-l \quad \text{vecteurs}}\}.$$

On remarque que, par construction de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 0_{(M-l)\times n} \end{pmatrix}$$

est la matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Soit $M_{\text{can}\to\mathcal{B}} \in \mathrm{GL}_N(K)$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, et soit $M_{\mathcal{C}\to\text{can}} \in \mathrm{GL}_M(K)$ la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à la base canonique. On a

$$A = M_{\mathcal{C}\to\text{can}} \cdot P \cdot M_{\text{can}\to\mathcal{B}}.$$

En particulier, A est équivalente à P.
En utilisant (4), on a maintenant directement que deux matrices sont équivalentes, si elles ont le même rang (comme elles seront toutes les deux équivalentes à la même matrice P).
La réciproque a été montrée au corollaire 3.3 du cours VI. Matrices équivalentes et systèmes d'équations.