EPFL - Printemps 2023	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Corrigé – bonus 1	

Exercice bonus 1.
Considérons l'anneau suivant pour un corps quelconque k :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in k \right\}.$$

1. Démontrez que si $I \neq A$ est un idéal (bilatère/à gauche/à droite) de A, alors I est contenu dans un des sous-ensembles suivants de A :

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in k \right\}$$

et

$$A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid b, c \in k \right\}.$$

2. Montrez que A_1 et A_2 sont des idéaux bilatères. Montrez que A_1 et A_2 avec l'addition et la multiplication héritée de l'anneau A ne sont pas des anneaux.

3. Listez tous les idéaux (bilatères/à gauche/à droite) de A.

Solution. On note A^{op} l'anneau avec groupe additif $(A, +)$ avec la multiplication définie par

$$g_1 *_{op} g_2 = g_2 g_1.$$

Notez en premier lieu l'isomorphisme d'anneaux entre $\sigma : A \to A^{op}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

On vérifie que c'est un isomorphisme. La bijectivité est claire, comme σ est son propre inverse au niveau ensembliste. De plus comme

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_1 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} c_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & a_1 a_2 \end{pmatrix},$$

on conclut que σ est un isomorphisme d'anneaux.

Cela va nous permettre d'effectuer des raisonnements par symétrie et de faire moins de calculs.
Barème. On enlèvera 10 points pour des affirmations de type "par symétrie" non motivées par des calculs ou l'isomorphisme évoqué ci-dessus. La symétrie ressentie dans la résolution de ce problème est incarnée par cet isomorphisme et il est important de pouvoir le détecter si on tient à formaliser de tels arguments.

1. On remarque si deux éléments d'une matrice dans la diagonale sont non-nuls, alors la matrice est inversible. Ainsi si I est un idéal (bilatère/à gauche/à droite) et $i \in I$ tel que les deux éléments de la diagonale sont non-nuls, comme i a dès lors un inverse (à gauche et à droite) alors $I = A$. Par contraposée, on conclut.

   Barème. 10pts.

2. Notons que si
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
alors $A_1 = e_1 A$. Dès lors, A_1 est un idéal à droite. Maintenant pour $a, b, c \in k$ si
$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad g' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
on a $ge_1 = e_1 g'$. Ainsi on conclut que $e_1 A$ est également un idéal à gauche.

Comme $e_1^2 = e_1$, on voit que e_1 est un élément neutre à gauche dans A_1. Si A_1 était un anneau avec la multiplication et l'addition héritée de A, celui-ci aurait un unique élément neutre 1_{A_1} et nécessairement $1_{A_1} = e_1$ car on aurait $e_1 = e_1 1_{A_1} = 1_{A_1}$. Mais si
$$e_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
on voit $e_1' e_1 = 0 \neq e_1'$. Ainsi, on conclut que A_1 ne peut être un anneau avec la multiplication et l'addition héritée de A.

Maintenant, A_1 est envoyé sur A_2 par l'isomorphisme σ. Dès lors, on conclut que A_2 est un idéal bilatère, et que A_2 ne peut être un anneau avec l'addition et la multiplication héritée de A.

Barème. 10 points pour montrer que A_1 et A_2 sont bilatères. 20 points pour montrer que ce ne sont pas des anneaux.

3. Traitons les idéaux non-nuls et non égaux à A. On commence par traiter les idéaux strictement contenus dans A_1. On voit qu'un tel idéal I est forcément un k-espace vectoriel de dimension 1. Ainsi I est forcément de la forme, pour $a, b \in k$ fixés non tous les deux nuls
$$I = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in k \right\}.$$
Si $a = 0$, on note l'idéal
$$I_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in k \right\}.$$
Comme $I_0 = A_1 \cap A_2$, I_0 est un idéal bilatère.

On traite maintenant le cas $a \neq 0$. On a les possibilités suivantes pour $\mu \in k$
$$I_1(\mu) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in k \right\}.$$
Si $a, b, c \in k$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Ainsi $I_1(\mu)$ est un idéal à gauche. En revanche comme
$$\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
on voit que $I_1(\mu)$ n'est pas un idéal à droite.

On a donc traité tous les idéaux non-nuls et stricts de A_1. On sait de plus par le premier point que les idéaux non égaux à A sont forcément dans A_1 ou dans A_2.

Notons
$$I_2(\mu) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in k \right\}.$$

Par symétrie (l'isomorphisme entre A et A^{op} évoqué plus haut), on peut donc conclure que

$$\{0\}, I_0, A_1, A_2, A \text{ sont les idéaux bilatères}$$

que pour $\mu_1 \in k$

$$I_1(\mu_1) \text{ sont les idéaux à gauche mais pas à droite}$$

et que pour $\mu_2 \in k$

$$I_2(\mu_2) \text{ sont les idéaux à droite mais pas à gauche.}$$

Barème. 10 points pour montrer que I_0 est bilatère. 10 points pour montrer que les $I_1(\mu)$ sont des idéaux à gauche. 10 points pour montrer que les $I_1(\mu)$ ne sont des idéaux pas des idéaux à droite. 20 points pour traiter les $I_2(\mu)$ (donc que ce sont des idéaux à droite et pas à gauche). 10 points pour conclure avec la liste et argumenter que ce sont les seuls.