Exercice 1. Au début de la section sur la démonstration par récurrence du cours de 1re année, la formule

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

est démontrée. Démontrons maintenant la formule de la somme des cubes, et pour cela, posons

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- $P(1)$: l'expression de gauche est $\sum_{k=1}^{1} 1^3 = 1$, et celle de droite est $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$. On a bien "gauche = droite", l'initialisation est établie.
- $P(n) \implies P(n+1)$: $$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{P(n)}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$ $$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}$$ $$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

  c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$, qui est bien $P(n+1)$. L'hérédité est établie.

Ces deux étapes montrent que $P(n)$ est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En comparant les deux formules de somme, on obtient l'égalité étonnante

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Exercice 2. On calcule $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$, $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}$. On conjecture naturellement(!)

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

que l'on démontre par récurrence comme suit.

- $P(1)$: notre conjecture a été établie sur $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ et $P(4)$. En particulier, $P(1)$ est vraie.
- $P(n) \implies P(n+1)$: $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$ $$\overset{P(n)}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$ $$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

  c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$, qui est bien $P(n+1)$. L'hérédité est établie.

Ces deux étapes montrent que la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (et n'est donc plus une conjecture !).

Exercice 3. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N_1$. De même, comme $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N_2$.
On pose $N := \max\{N_1, N_2\}$, et alors, pour tout $n \geq N$, on a

$$|x_n + y_n - (x+y)| = |x_n - x + y_n - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi, la suite $x_n + y_n$ converge bien vers $x + y$.

Exercice 4.

a) Pour montrer que $\left(\sqrt{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$, on sera amené à évaluer $\left|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}\right|$ sachant que $|x_n-a|$ est "petit". Comme suggéré par l'indication, on calcule

$$\left|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}\right| \overset{\text{astuce !}}{=} \left|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}\right|\cdot\frac{\sqrt{x_n}+\sqrt{a}}{\sqrt{x_n}+\sqrt{a}} = \frac{|x_n-a|}{\sqrt{x_n}+\sqrt{a}} \leq \frac{|x_n-a|}{\sqrt{a}}$$

l'inégalité étant vraie car $\sqrt{x_n}\geq 0$ et $\sqrt{a}\neq 0$.
Passons à la démonstration, et posons $\varepsilon>0$. Par hypothèse, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $|x_n-a|<\sqrt{a}\cdot\varepsilon$ pour tout $n\geq N$, et donc

$$\left|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}\right| \leq \frac{|x_n-a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\cdot\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon$$

pour tout $n\geq N$, ce qui démontre bien que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$ si $a\in\mathbb{R}_+^*$.

b) Supposons que $a=0$, et soit $\varepsilon>0$. Par hypothèse, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $|x_n-a|=x_n<\varepsilon^2$ pour tout $n\geq N$. Donc

$$\left|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}\right| = \sqrt{x_n} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

pour tout $n\geq N$, et on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$ dans ce cas aussi.

Exercice 5.

a) $\left|\dfrac{1}{n!}-0\right|<\dfrac{1}{100} \iff \dfrac{1}{n!}<\dfrac{1}{100} \iff n!>100 \iff n>5$, alors on peut choisir $N=5$ car $5!=120>100$.

b) $\left|\dfrac{3n}{4n+2}-\dfrac{3}{4}\right| = \left|\dfrac{-6}{16n+8}\right| < \dfrac{1}{100} \iff \dfrac{16n+8}{6}>100 \iff 16n>592 \iff n>37$, ainsi on peut prendre $N=37$.

c) $x_n\geq 1000 \iff \dfrac{2n^2}{n-1}\geq 1000 \iff 2n^2-1000n+1000\geq 0$. En étudiant le signe de la fonction quadratique $f(n)=2n^2-1000n+1000$, on se rend compte qu'elle est positive quand $n<250-20\sqrt{155}\cong 1$ ou quand $n>250+20\sqrt{155}\cong 499$, ainsi on peut choisir $N=500$. Et alors pour tout $n\geq 500$ on aura $x_n\geq 1000$. Comme 1000 a été choisi arbitrairement, on pourrait prendre une constante plus grande et trouver un autre tel N. On a ainsi montré que la suite n'est pas bornée, et comme elle est croissante elle tend vers $+\infty$.

Exercice 6.

a) Soit $\varepsilon>0$ fixé. On doit montrer l'existence de $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$ on a $\left|\dfrac{2n}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon \iff \dfrac{2n}{n^2+1}<\varepsilon \iff \varepsilon n^2-2n+\varepsilon>0$. En étudiant le signe la fonction quadratique $f(n)=\varepsilon n^2-2n+\varepsilon$, on en déduit que si $n>\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}+1}{\varepsilon}$ (on écarte la solution négative) alors $f(n)>0$ et donc on a gagné. Ainsi on prendra $N=\lfloor\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}+1}{\varepsilon}\rfloor$. Notons encore que si $1-\varepsilon^2<0$ alors notre N n'est pas bien défini mais remarquons que dans ce cas la fonction quadratique $f(n)$ est toujours positive et on peut prendre $N=0$, ainsi $N=\begin{cases}\lfloor\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}+1}{\varepsilon}\rfloor & \text{si } 1-\varepsilon^2\geq 0,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

b) Soit $\varepsilon>0$ fixé. On doit montrer l'existence de $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$ on a $\left|\dfrac{2n^2+1}{7n^2+n+5}-\dfrac{2}{7}\right|<\varepsilon \iff \left|\dfrac{7(2n^2+1)}{7(7n^2+n+5)}-\dfrac{2(7n^2+n+5)}{7(7n^2+n+5)}\right|<\varepsilon \iff \left|\dfrac{-2n-3}{49n^2+7n+35}\right|<\varepsilon \iff \dfrac{2n+3}{49n^2+7n+35}<\varepsilon \iff 2n+3<\varepsilon(49n^2+7n+35) \iff 49\varepsilon n^2+(7\varepsilon-2)n+35\varepsilon-3>0$. Ainsi en raisonnant comme au point précédent, on en déduit que

$$N=\begin{cases}\lfloor\frac{\sqrt{-6811\varepsilon^2+560\varepsilon+4}-7\varepsilon+2}{98\varepsilon}\rfloor & \text{si } -6811\varepsilon^2+560\varepsilon+4\geq 0,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 7. Grâce à cette inégalité on a $\frac{n^2}{2^n}\leq\frac{24n^2}{n^3}=\frac{24}{n}$ (pour n entier et $n\geq 4$). Nous avons vu au cours que la suite $1/n$ tend vers 0 et la proposition sur le produit de limites nous dit que la suite $24\cdot 1/n$ tend vers

$24 \cdot 0 = 0$. Comme $0 \leq \frac{n^2}{2^n} \leq \frac{24}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on voit que la suite $(\frac{n^2}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ avec $|\frac{n^2}{2^n} - 0| = \frac{n^2}{2^n} \leq \frac{24}{n} = |\frac{24}{n} - 0| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$).

Exercice 8. Remarquons que $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 4}{3} = \dfrac{x_n}{3} + \dfrac{4}{3}$. Ainsi x_n est positif quelque soit n et de plus si la la limite existe elle sera plus grande que $\dfrac{4}{3}$. En faisant tendre n vers l'infini dans la relation de récurrence et en observant les règles d'une proposition du cours, on a qu'un candidat x à la limite doit satisfaire l'équation

$$x = \frac{x+4}{3},$$

dont la seule solution est $x = 2$. Montrons que c'est bien la limite de la suite, pour ceci estimons la différence

$$|x_{n+1} - x| = \left|\frac{x_n + 4}{3} - \frac{x+4}{3}\right| = \left|\frac{x_n - x}{3}\right|.$$

On itère ce procédé et on trouve finalement que

$$|x_{n+1} - x| = \frac{|x_0 - x|}{3^{n+1}} = \frac{2}{3^{n+1}}.$$

Or pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $\dfrac{2}{3^{N+1}} < \varepsilon$. Alors pour tout $n \geq N+1$ on a

$$|x_n - x| \leq \frac{2}{3^n} \leq \frac{2}{3^{N+1}} < \varepsilon$$

ce qui montre bien que la suite x_n tend vers 2.

Exercice 9. En raisonnant comme dans l'exercice précédent, on doit avoir que la limite, si elle existe, vérifie $x = \sqrt{1+x} \iff x^2 = 1 + x \iff x^2 - x - 1 = 0$. Ainsi les candidats potentiels sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, or comme tous les termes x_n sont positifs, on peut écarter la solution négative et donc le seul candidat potentiel est $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrons que ce x est bien la limite de la suite en estimant la différence

$$|x_{n+1} - x| = \left|\sqrt{1+x_n} - \sqrt{1+x}\right| = \left|\frac{(1+x_n) - (1+x)}{\sqrt{1+x_n} + \sqrt{1+x}}\right| = \left|\frac{x_n - x}{x_{n+1} + x}\right| \leq \frac{|x_n - x|}{2}$$

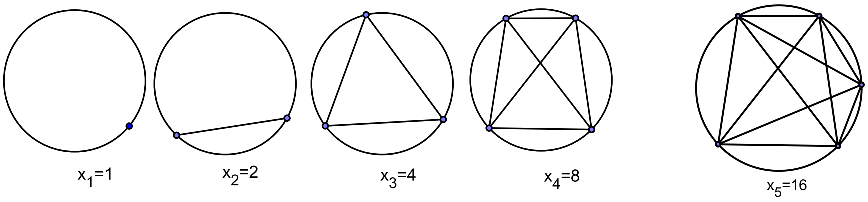
où on a utilisé dans la deuxième égalité la multiplication par $\frac{\sqrt{1+x_n}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x_n}+\sqrt{1+x}}$ et une identité remarquable pour enlever les racines, et dans la dernière inégalité on a utilisé le fait que x_n et x sont plus grands que $x_1 = 1$. Ainsi en itérant ce procédé on trouve finalement que

$$|x_{n+1} - x| = \frac{|x_0 - x|}{2^{n+1}} < \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}.$$

Comme $\frac{1}{2^n}$ est aussi petit que l'on veut (en prenant N assez grand, et $n \geq N$), la suite (x_n) converge vers x.

Bonus.

a) et b)



c) Comptons combien de nouvelles régions sont créées quand une corde est rajoutée. Une nouvelle corde va partager chaque région qu'elle traverse en deux (rajoutant ainsi une région par région existante) ; de plus, cette corde va traverser autant de régions que de cordes qu'elle intersecte à l'intérieur du cercle, plus 1. Donc chaque corde rajoute autant de régions que ses points d'intersections intérieurs, plus 1.
Comme chaque paire de points détermine une corde, et que, par l'exercice sur les coefficients binomiaux, il y a $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$ manières de choisir 2 points distincts parmi n, il y a $\dbinom{n}{2}$ cordes (on fera donc $\dbinom{n}{2}$ fois le raisonnement ci-dessus, et donc $\dbinom{n}{2}$ fois "plus 1").

Comme quatre points distincts déterminent une unique intersection à l'intérieur du cercle, il y a $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ points d'intersection intérieurs (les manières de choisir 4 points distincts parmi n).

Mais ces $\binom{n}{2} + \binom{n}{4}$ sont les régions *rajoutées* à la région d'origine (le disque entier) ; il y a donc

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

régions pour n points distincts sur le cercle.

d) $x_6 = 31$.