

---

**Algèbre linéaire avancée II**  
printemps 2022

---

**Série 1**

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (\*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (\*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (\*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (\*) sera une question ouverte de l'examen final.

---

**Exercice 1. (+)**

Soit  $R$  un anneau et  $\alpha \in Z(R)$  un élément du centre de  $R$ . Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Phi: R[x] &\rightarrow R \\ f(x) &\mapsto f(\alpha) \end{aligned}$$

est un morphisme d'anneaux surjectif.

**Exercice 2.** 1. Trouver le polynôme  $f(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$  de degré au plus 4 tel que  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 4$ ,  $f(3) = 0$ ,  $f(4) = 4$ . Établir un système d'équations linéaires correspondant.

2. Soient les polynômes  $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + x + 1$  et  $g(x) = 2x^2 + 3x + 2$  sur le corps  $\mathbb{Z}_5$ . Trouver deux polynômes  $q$  et  $r$  sur  $\mathbb{Z}_5$  tels que :

- $f = qg + r$ , et
- $\deg(r) < \deg(g)$ .

**Exercice 3.** Soit  $K$  un corps. Montrer que le déterminant de  $A = V_{r_0, \dots, r_n} \in K^{(n+1) \times (n+1)}$  est

$$\det(V_{r_0, \dots, r_n}) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (r_j - r_i).$$

**Exercice 4.** Soit  $K$  un corps et  $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$  des éléments distincts ( $n \geq 1$ ). On définit

$$c_k(x) = \frac{\prod_{i \neq k} (x - a_i)}{\prod_{i \neq k} (a_k - a_i)}$$

et soit  $f(x) \in K[x]$  un polynôme tel que  $f(x) = 0$  ou  $\deg(f(x)) \leq n$ . Montrer que

$$f(x) = f(a_0)c_0(x) + f(a_1)c_1(x) + \dots + f(a_n)c_n(x).$$

**Exercice 5. (\*)**

Soit  $R$  un anneau.

- i) Montrer que l'élément 1 est unique.
- ii) Montrer qu'un élément inversible  $r \in R^*$  n'est pas un diviseur de zéro.
- iii) Montrer que deux polynômes

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \quad \text{et} \quad q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots \in R[x]$$

sont égaux si et seulement si  $a_i = b_i$  pour tous  $i$ .

- iv) Soit  $R^{n \times n}$  l'anneau des matrices  $n \times n$  sur  $R$ . Montrer que le centre de  $R^{n \times n}$  est  $Z(R^{n \times n}) = \{aI_n : a \in Z(R)\}$ .