EPFL - Printemps 2023	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 2	6 mars 2023

Les exercices indiqués par une étoile $\star$ sont optionnels.

Exercice 1.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'ensemble B est un sous-anneau, un idéal à gauche, un idéal à droite, un idéal bilatère de l'anneau A ou s'il ne possède aucune de ces propriétés:

(a) $A = \mathbb{Z}$ et $B = 9\mathbb{Z}$;

(b) $A = \mathbb{F}_{11}$ et $B = \{[0], [2], [4], [6], [8], [10]\}$;

(c) $A = \mathbb{Z}[t]$ et $B = t^2 \cdot \mathbb{Z}[t^2]$;

(d) $A = \mathbb{F}_2[t]$ et $B = t^2 \cdot \mathbb{F}_2[t]$;

(e) $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$;

(f) $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{Z}[i]$;

(g) $A = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ et $B = \{[0], [5], [10]\}$;

(h) $A = M_n(\mathbb{R})$, $B = \{M \mid m_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}$;

(i) $A = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \text{ ne divise pas } b \right\}$ et $B = p^n \mathbb{Z}_{(p)}$, où p est un premier et $n \in \mathbb{N}$;

(j) $A = M_3(\mathbb{R})$ et $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$;

(k) $A = M_3(\mathbb{R})$ et $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$;

(l) $A = M_3(\mathbb{R})$ et $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & b & 0 \\ c & c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

(m) $A = \mathbb{C}[S_3]$ et $B = \left\{ \sum_{g \in S_3} \lambda \cdot g \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}$;

(n) $A = \mathbb{C}[S_3]$ et $B = \left\{ \sum_{g \in S_3} (-1)^{\mathrm{sgn}(g)} \lambda \cdot g \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}$;

(o) $A = \mathbb{C}[S_3]$ et $B = \left\{ \lambda \cdot \mathrm{Id} + \lambda\varepsilon(123) + \lambda\varepsilon^2(132) + \mu(12) + \mu\varepsilon(23) + \mu\varepsilon^2(13) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\}$, où ε est une racine cubique primitive d'unité;

(p) $A = \mathbb{C}[S_3]$ et $B = \{\lambda(123) + \lambda(132) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Exercice 2.
Soit K un corps et $M_n(K)$ l'anneau des matrices carrées de taille $n \times n$.

1. Soit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ fixés. Soit I un idéal à gauche de $M_n(K)$ contenant la matrice e_{ij}. Montrer que I contient aussi toutes les matrices "concentrées dans la j-ème colonne", i.e. (b_{rs}) avec $b_{rs} = 0$ si $s \neq j$.

2. Montrer que le sous-ensemble des matrices concentrées dans la j-ème colonne forme un idéal à gauche de $M_n(K)$.

3. Montrer que les seuls idéaux bilatères de $M_n(K)$ sont $\{0\}$ et $M_n(K)$.

Exercice 3.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier la réponse par un raisonnement ou un contre-exemple.

(a) Si A est un anneau intègre, et I et J sont deux idéaux non nuls de A, alors $I \cap J$ est aussi un idéal non nul de A.

(b) Si K est un corps, alors les deux seuls idéaux de K sont $\{0\}$ et K.

(c) Si K est un anneau n'ayant que deux idéaux bilatères, alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.

(d) Si K est un anneau commutatif n'ayant que deux idéaux, alors K est un corps.

(e) Si K est un anneau tel que les seuls idéaux à gauche sont $\{0\}$ et K, alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.

(f) Si K est un anneau tel que les seuls idéaux à droite sont $\{0\}$ et K, alors tout élément non-nul de K possède un inverse à gauche et à droite.

Exercice 4.
Montrer les isomorphismes suivants:

(a) $K[t]/(t-a) \cong K$ si K est un corps et $a \in K$.

(b) $M_n(A)/M_n(I) \cong M_n(A/I)$ si I est un idéal bilatère de A.

(c) $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]/(5+2\sqrt{7}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (on pourra commencer par identifier le noyau de l'unique homomorphisme d'anneaux $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[\sqrt{7}]/(5+2\sqrt{7})$).

Exercice 5.
Soit A un anneau intègre. Si $f, g \in A[t]$, alors $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.

Exercice 6.
Montrer que $\mathbb{Z}[\varepsilon] \cong \mathbb{Z}[t]/(t^2+t+1)$, où ε est une racine cubique primitive de l'unité.

Exercice 7 ($\star$)**.**
Soit R un anneau commutatif. Déterminer $(R[t])^\times$.
Cet exercice peut être mieux compris grâce à la notion d'idéal premier qui sera vue dans quelques semaines. On reproposera ainsi cet exercice comme exercice optionnel dans la série 4.

Exercice 8 ($\star$)**.**
The goal of this exercise is to show that $\mathbb{Q}$ can be exhibited as the fraction field of many subrings other than $\mathbb{Z}$. We begin by giving the following definitions.

Definition 1 (Valuation Function)**.**
Let K be a field, a discrete valuation is a function $\nu : K \setminus 0 \to \mathbb{Z}$, such that

a) $\nu(x \cdot y) = \nu(x) + \nu(y)$

b) $\nu(x+y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$

We say that ν is non-trivial if it is not the constant 0 function.

Definition 2 (Valuation Ring)**.**
If ν is a discrete valuation function on the field K, then the valuation ring R_ν is the subset $\{x \in K | \nu(x) \geq 0\} \cup \{0\}$ of K.

Show that for a discrete valuation function ν on K we have:

1. $\nu(1) = 0$, $\nu(-1) = 0$.
2. R_ν is a subring of K.
3. K is the fraction field of R_ν.

From now on, $K = \mathbb{Q}$, that is the field of rational numbers. Show that

4. For every $x \in \mathbb{Z}$ we have $\nu(x) \geq 0$.
5. If $\nu(p) = 0$ for all primes p, then ν is trivial.
6. $\nu(p) \neq 0$ can happen for at most one (positive) prime p.
7. If $\nu(p) \neq 0$, then ν is given by $\nu(p^i a/b) = i \cdot c$, where a and b are prime to p and c is a fixed positive integer. Conversely, show that the above formula is a discrete valuation (called the p-adic valuation for $c = 1$, which we denote by ν_p).
8. Show that the valuation ring of ν_p is not equal to $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.