Série 24

Pour le 5 avril 2023

Exercice 1

Calcule les primitives des fonctions suivantes en les décomposant en sommes de fractions simples :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 5}$;

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8}$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^5}{x^3 - 1}$.

Exercice 2

Fractions rationnelles. Calcule les intégrales définies

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 - x}{x + 1} dx$;

b) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x(x-1)(x-2)} dx$;

c) $\displaystyle\int_3^6 \frac{x + 7}{x^2 - x - 2} dx$;

Exercice 3

Longueur de courbes. Calcule les longueurs des courbes suivantes en utilisant la formule intégrale du cours dans chaque cas :

a) un segment de droite donné par $f(x) = ax + b$ pour $x \in [0, 1]$;

b) le cercle de rayon R donné dans le premier quadrant par la fonction $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ pour $x \in [0, R]$;

c) la chaînette d'équation $y = \cosh x$ comprise entre les points d'abscisse $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 4

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

a) La longueur d'une courbe peut être négative ou nulle lorsque l'expression $\sqrt{1+f'(x)^2}$ prend des valeurs négatives.

b) La longueur du cercle unité parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre vaut -2π (alors que la longueur du cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique vaut 2π comme nous l'avons vu en cours).

c) La décomposition en fractions simples de x^2+1 est x^2+1.

d) La décomposition en fractions simples de $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ est $\dfrac{x-1}{x+1}$.

e) La décomposition en fractions simples de $\dfrac{x}{x^2+2x+1}$ est $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

f) La décomposition en fractions simples de $\dfrac{2x}{x^2-1}$ est $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$. Par conséquent, les primitives de cette fraction rationnelle sont de la forme $\ln|x+1|+\ln|x-1|+C$ pour $C\in\mathbb{R}$.

Exercice 5

Fractions rationnelles déguisées. Calcule les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\cosh x+2\sinh x+1}dx$

Indication. Effectue d'abord le changement de variables $x=\ln t$.

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{2x-x^2}}dx$;

Indication. Effectue le changement de variables $x=1+\sin t$ pour faire tomber la racine, puis $s=\tan(t/2)$.

Exercice 6

Calcule les intégrales suivantes pour $x > 0$.

a) $\displaystyle\int_0^x t\sin^2 t dt$;
Indication. Tu peux utiliser la formule de duplication d'un angle, puis une intégration par parties.

b) $\displaystyle\int_0^x e^{\sqrt{t+1}} dt$;
Indication. Fais un changement de variables !

c) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{2+\cos t} dt$ pour $x < \pi$;
Indication. Utilise le changement de variables $s = \tan(t/2)$.

Exercices théoriques

Exercice 7

Soit d un nombre réel n'appartenant pas à l'intervalle $[a, b]$. Calcule les intégrales

a) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x-d} dx$;

b) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-d)^n} dx$ pour un entier $n > 1$;

Calcule en particulier l'aire comprise entre l'axe Ox pour $5 - e \leq x \leq 5$ et le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-6}$. Effectue un dessin de la situation et vérifie le signe de ta réponse !

Exercice 8

Longueur d'une courbe paramétrisée. Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe du plan donnée sous forme paramétrique. On suppose que $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ est continûment dérivable (dérivable et la dérivée est continue). Nous aimerions calculer la longueur de cette courbe.

a) On considère la subdivision régulière d'ordre n de l'intervalle $[a,b]$. On appelle $x_1, \dots, x_{n-1}$ les points se trouvant entre $a = x_0$ et $b = x_n$. Calcule le vecteur $\overrightarrow{\varphi(x_{i-1})\varphi(x_i)}$ et sa norme.

b) Montre qu'il existe des points $x_{i-1} < c_i, d_i < x_i$ tels que la longueur de la ligne polygonale brisée de sommets $\varphi(x_j)$ pour $0 \le j \le n$ vaut

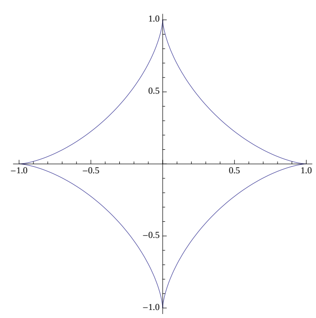
$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \sqrt{\varphi_1'(c_i)^2 + \varphi_2'(d_i)^2}.$$

c) Considérons la fonction $f(t) = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}$. Montre que cette fonction est intégrable sur $[a,b]$ et que la somme de Darboux inférieure (respectivement supérieure) de f sur σ_n est inférieure à L_n (respectivement supérieure à L_n).

d) Conclus-en que la longueur de la courbe donnée par φ vaut $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}dt$.

e) Calcule la longueur du cercle de rayon r en choisissant la paramétrisation $\varphi(t) = (r\cos t, r\sin t)$.

f) Calcule la longueur de l'astroïde donnée par $\varphi(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$. Trouve d'abord les bornes d'intégration de sorte à décrire la courbe suivante :



Fais bien attention à intégrer une fonction positive ! Pour cela on pourra trouver des symétries dans la figure étudiée et se ramener au calcul de la longueur d'un quart d'astroïde !

g) Calcule la longueur de la cardioïde définie par $\varphi(t) = (\cos t(1+\cos t), \sin t(1+\cos t))$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Fais un dessin de cette courbe fermée.