Corrigé série 19

Exercice 1 (10 points)

On veut transformer la matrice $(A\,|\,I)$ en $(I\,|\,A^{-1})$. Voici les étapes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{D_2(\frac{1}{2})E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 4 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & -7 & | & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{23}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -3 & -\frac{7}{2} & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (10 points)

En forme de matrice, on trouve que

$$\begin{pmatrix} x & ay & | & -1 \\ x & -y & | & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x & ay & | & -1 \\ 0 & -(a+1)y & | & a+1 \end{pmatrix}.$$

Si $a = -1$, l'espace de solutions est

$$\{(x, y) : x - y = -1\}.$$

Dans le cas où $a \neq -1$, il y a exactement une solution : $y = -1$ et $x = a - 1$.

Exercice 3 (10 points)

On calcule que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1-a \\ a & 1+a & 1+a & | & a-a^2 \\ a & 1-a & 1-a & | & a^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1-2a & 1-2a & | & 2a^2-a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2a^2-a \end{pmatrix}$$

Donc, si une solution existe, $a = 0$ ou $a = \frac{1}{2}$. L'espace de solutions (si une solution existe) est

$$\{(x, y, z) : x = 1 - a, y = -z\}.$$

Exercice 4 (10 points)

La matrice A de α dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} -3 & 14 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 17 & 2 \end{pmatrix}.$$

On calcule le déterminant de $A - \lambda I$:

$$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 14 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -3 & 17 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \ldots = \lambda(3-\lambda)(\lambda+1)$$

Les valeurs propres sont donc -1, 0 et 3.

On commence par exemple par trouver l'espace propre associé à la valeur propre 3. Il faut donc déterminer le noyau de $A - 3I = \begin{pmatrix} -6 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 17 & -1 \end{pmatrix}$. Ainsi, il faut résoudre le système

$$\begin{cases} -6x + 14y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ -3x + 17y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ z = 5y \end{cases}$$

On cherche ensuite de la même manière que ci-dessus les espaces propres E_0 et E_1 de A. Les vecteurs propres de A sont donc

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et leurs valeurs propres sont, respectivement, 3, -1, et 0. Par conséquent, une base qui donne une matrice diagonale est $\mathcal{B}^* = ((4;1;5);(1;0;1);(2;0;3))$ et la matrice diagonale dans la base $\mathcal{B}^*$ est

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (10 points)
La matrice de α par rapport à base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

On calcule le déterminant de $A - \lambda I$:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)$$

Les valeurs propres sont donc 1, 2 et 3.
On commence par exemple par trouver l'espace propre associé à la valeur propre 3. Il faut donc déterminer le noyau de $A - 3I = \begin{pmatrix} -6 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 17 & -1 \end{pmatrix}$. Ainsi, il faut résoudre le système

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \\ 2x - 4y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -2y \end{cases}.$$

Ainsi, l'espace propre est par exemple engendré par le vecteur propre $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On peut calculer que les espaces propres E_1 et E_2 associés de A sont engendrés par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, respectivement. Par conséquent, une base qui donne une matrice diagonale est $\mathcal{B}^* = ((-1;-1;2);(0;0;1);(-1;0;2))$ et la matrice diagonale dans la base $\mathcal{B}^*$ est

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 (10 points)

a) **Vrai.** Si A et B sont des matrices $n \times n$ semblables, alors il existe une matrice P inversible de rang n telle que
$$AP = PB.$$
Comme la dimension du noyau de P vaut 0, on a que la dimension du noyau de AP vaut la dimension du noyau de A.
De même, la dimension du noyau de PB vaut la dimension du noyau de B.
Comme la dimension du noyau de PB vaut la dimension du noyau de AP (comme $AP = PB$), on a que les rangs de A et B sont les mêmes.

b) **Faux.** Les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
(qui sont de rang 2) ne sont pas semblables.

c) **Vrai.** Les matrices de rotation d'angle $\pi/4$ et de rotation d'angle $\pi/8$ ont même rang.

d) **Vrai.** Si A et I_n sont semblables, alors il existe une matrice P telle que
$$A = P^{-1} I_n P = I_n,$$
comme toute matrice commute avec I_n.

Exercice 7 (10 points)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ b & b & b \end{pmatrix}.$$
On calcule le déterminant de $A - \lambda I$, en utilisant les matrices élémentaires $E_{32}(1)E_{31}(1)$, puis $E_{23}(-a)$:
$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ a & a-\lambda & a \\ b & b & b-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ a & a-\lambda & a \\ a+b+1-\lambda & a+b+1-\lambda & a+b+1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (a+b+1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ a & a-\lambda & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (a+b+1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (a+b+1-\lambda)[(1-\lambda)\cdot(-\lambda) + \lambda] = -\lambda^2(a+b+1-\lambda)$$

Les valeurs propres sont donc 0 et $a+b+1$ et les espaces propres associés sont

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{et} \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Exercice 8 (10 points)

Il est clair que α est linéaire : chaque élément de la base canonique est envoyé sur un autre.
Soit $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ une suite de nombres réelles. Si $\alpha x = \lambda x$ pour un certain λ, on trouve que

$$\begin{aligned} x_2 &= \lambda x_1 \\ x_3 &= \lambda x_2 \\ x_4 &= \lambda x_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Alors, si $n > 1$, $x_n = \lambda^{n-1} x_1$.
Donc, les vecteurs propres sont de la forme

$$x = (x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \lambda^3 x_1, \ldots)$$

avec valeur propre correspondante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 (10 points)

Soit A la matrice de $M_n(K)$ dont tous les coefficients valent 1. Soit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

un vecteur de K^n. Si on a

$$Ax = \lambda x,$$

pour un certain λ, alors

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix},$$

donc, $\lambda x_1 = \lambda x_2 = \cdots = \lambda x_n$. Alors, soit $\lambda = n$ et

$$x = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c \in K,$$

soit $\lambda = 0$ et

$$x \in \{(v_1, \ldots, v_n) \in K^n : v_1 + \cdots + v_n = 0\}.$$

Exercice 10 (5 points)

Soit $v \in V$ un vecteur propre de $\alpha\beta$ avec valeur propre λ. Alors,

$$(\alpha\beta)v = \lambda v \Rightarrow \alpha(\beta v) = \lambda v.$$

Soit $u = \beta v$. Alors,

$$\beta\alpha u = \beta(\lambda v) = \lambda(\beta v) = \lambda u$$

et donc u est un vecteur propre de $\beta\alpha$ avec valeur propre λ.
De même, chaque valeur propre de $\beta\alpha$ est une valeur propre de $\alpha\beta$. Donc, $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 11 (5 points)

a) C'est clair.

b) Par la première partie, on sait que chaque base de n'importe quels vecteurs (linéairement indépendant, bien sûr) est une base qui est composée de vecteurs propres. Aussi, toutes les valeurs propres valent a pour les vecteurs dans la base.

c) Par la deuxième partie, chaque matrice P de changement de base est composée des vecteurs propres dont toutes les valeurs propres valent a. Donc,

$$P^{-1}AP = aI_n.$$

d) Cela suit immédiatement de la troisième partie.

e) Note que aI_n commute avec toute matrice $n \times n$. Donc,

$$P^{-1}(aI_n)P = (aI_n)(P^{-1}P) = aI_n.$$