Corrigé série 20

Exercice 1 (10 points)

On commence par chercher les valeurs propres en calculant le déterminant de la matrice $A - \lambda I$:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+10\lambda^2-28\lambda+24 = (\lambda-2)(-\lambda^2+8\lambda-12) = -(\lambda-2)^2(\lambda-6)$$

Les valeurs propres sont donc 2 et 6.

On calcule les espaces propres associés de la même manière que dans la série 19 et on obtient

$$E_2 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0\} =< (1;0;-1);(0;1;-2) >$$

et

$$E_6 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z\} =< (1;1;1) >$$

Comme $\dim(E_2) + \dim(E_6) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, α est diagonalisable. La base correspondante est la base formées des vecteurs propres : $\mathcal{B}^* = ((1;0;-2);(0;1;0);(1;1;1))$.

La matrice de changement de base et la matrice diagonale sont :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour calculer l'inverse, on utilise la matrice augmentée $(P \mid I)$ qu'on échelonne. On obtient la matrice

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

Exercice 2 (10 points)

a) On commence par chercher les valeurs propres en calculant le déterminant de la matrice $A-\lambda I$:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)[(7-\lambda)(5-\lambda)+1] = (6-\lambda)(\lambda^2-12\lambda+36) = -(\lambda-6)^3$$

La seule valeur propre est donc 6.

b) On calcule l'espace propre associé et on obtient

$$E_6 =< \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} >$$

c) α n'est pas diagonalisable car $\dim(E_6) = 2 \neq 3 = \dim(V)$

Exercice 3 (10 points)

a) $\alpha(x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 2x - 1 = -1 \cdot (x^2 - 2x + 1)$, donc oui, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = -1$.

b) On commence par déterminer la matrice relativement à la base canonique $(x^2; x; 1)$:

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

On calcule ensuite les valeurs propres en calculant le déterminant de la matrice $A - \lambda I$:

$$\det(A - \lambda I) = (-1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)$$

Les valeurs propres sont donc -1, 0 et 1.
On calcule les espaces propres associés et on obtient $E_{-1} =< x^2 - 2x + 1 >$, $E_0 =< x - 1 >$ et $E_1 =< 1 >$.
Comme $\dim(E_{-1}) + \dim(E_0) + \dim(E_1) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$, α est diagonalisable. La base correspondante est la base formées des vecteurs propres : $\mathcal{B}^* = (x^2 - 2x + 1, x - 1, 1)$.
La matrice diagonale associée à cette base est :

$$D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Exercice 4 (10 points)

a) Comme dans les exercices précédents, on commence par chercher les valeurs propres et les espaces propres correspondants. On trouve que les valeurs propres sont 0 et 1 et que les espaces propres associés sont $E_0 =< (2;1) >$ et $E_1 =< (3;1) >$. Il s'agit donc d'une projection sur la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

b) De la même manière, on obtient que les valeurs propres sont -1 et 1 et les espaces propres associés $E_{-1} =< (1;0;1);(0;1;0) >= \{(x;y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$ et $E_1 =< (2;1;1) >$. Il s'agit d'une symétrie relativement à la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallèlement au plan $x - z = 0$.

Exercice 5 (10 points)

On commence par remarquer que si $b = 0$, alors $a = \pm 1$ et les matrices sont des matrices diagonales. Supposons que $b \neq 0$. On calcule

$$\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(-a - \lambda) - b^2 = -a^2 + \lambda^2 - b^2 = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Les valeurs propres sont donc -1 et 1. On calcule les espaces propres associés et on obtient $E_{-1} =< \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix} >$ et $E_1 =< \begin{pmatrix} a+1 \\ b \end{pmatrix} >$. C'est donc une symétrie relativement à la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} a+1 \\ b \end{pmatrix}$ parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (10 points)

On choisit la base $\mathcal{B}^* = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (\overrightarrow{e_1^*}; \overrightarrow{e_2^*}; \overrightarrow{e_3^*})$.

Dans cette base, on a $p(\overrightarrow{e_1^*}) = 0$, $p(\overrightarrow{e_2^*}) = \overrightarrow{e_2^*}$ et $p(\overrightarrow{e_3^*}) = \overrightarrow{e_3^*}$. Ainsi, on a la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}^*$. Alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a $S = P \cdot D \cdot P^{-1}$. On calcule donc la matrice inverse P^{-1}, en échelonnant la matrice augmentée $(P \mid I)$ ou en calculant directement la matrice de passage de la base $\mathcal{B}^*$ à la base $\mathcal{B}$ et on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient finalement

$$S = P \cdot D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 (10 points)

On choisit par exemple le vecteur $\overrightarrow{n}_\pi = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}' = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, qui est orthogonal au plan. Comme sa longueur est de 4, on le normalise et on choisit le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Pour créer une base orthonormée, il faut choisir deux vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{n}$ et unitaires, par exemple $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

On pose la base $\mathcal{B}^* = (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{e})$ et dans cette base, on a $s(\overrightarrow{n}) = -\overrightarrow{n}$, $s(\overrightarrow{d}) = \overrightarrow{d}$ et $s(\overrightarrow{e}) = \overrightarrow{e}$. Ainsi, on a la matrice

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}^*$. Alors

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

et on a $S = P \cdot D \cdot P^{-1}$. On calcule donc la matrice inverse P^{-1}, en échelonnant la matrice augmentée $(P \mid I)$ ou en calculant directement la matrice de passage de la base $\mathcal{B}^*$ à la base $\mathcal{B}$ et on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

On obtient finalement

$$S = P \cdot D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 (5 points)
Soit λ une valeur propre de p. Alors il existe $v \neq 0$ tel que $p(v) = \lambda v$. Par conséquent, $p(p(v)) = p(\lambda v) = \lambda p(v) = \lambda^2 v$. Or, $p(p(v)) = p(v) = \lambda v$, donc $\lambda v = \lambda^2 v$. On a donc $(\lambda - \lambda^2)v = 0$ et les valeurs propres sont 1 et 0.

Exercice 9 (5 points)
Soit λ une valeur propre de s. Alors il existe $v \neq 0$ tel que $s(v) = \lambda v$. Par conséquent, $s(s(v)) = s(\lambda v) = \lambda s(v) = \lambda^2 v$. Or, $s(s(v)) = Id(v) = v$, donc $v = \lambda^2 v$. On a donc $(\lambda^2 - 1)v = 0$ et les valeurs propres sont -1 et 1.