exercice 2 (ensembles) ~15 minutes. 01.03.2023

1. Faux, lorsque $a=0$ l'équation devient $-\sqrt{2}=0$ qui n'a pas de solution. c'est vrai si $a\neq 0$.

2. Vrai, pour $a=1$ par exemple, mais aussi pour tout $a\neq 0$ $\in \mathbb{Q}$.

3. vrai, la solution est $x=a\sqrt{2}$.

4. ~~Faux~~, vrai seulement pour $a=0$, faux sinon, $a\sqrt{2}$ n'est pas rationnel si $a\neq 0$.

5. Faux, $a=1$ $b=0$ $c=1$ l'équation devient x^2+1 qui n'a pas de solutions réelles. car $x^2\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ par exemple.

6. vrai pour $a=1$ $b=0$, $c=-1$ on a $x^2-1=0$ qui a $\{-1,1\}$ comme ensemble de solutions.

7. En effet, on réécrit

$$x^2+2x+c = x^2+2x+1+(c-1) = (x+1)^2 + c-1.$$

alors $(x+1)^2\geq 0$ et si $c\geq 10$, l'équation ne s'annule jamais car strictement positive.

<u>exercice 7</u> . (10 minutes) .

(a) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ et $g(x) = \dfrac{7}{4x+6} + \dfrac{2}{x-2}$

$Ed(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. $Ed(g) = \mathbb{R} - \{3/2, 2\}$.

on peut récrire sous la forme :

$$f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{3}{x-2}$$

$$g : \mathbb{R} - \{-3/2, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{7}{4x+6} + \frac{2}{x-2}.$$

(b) c'est $D = Ed(f) \cap Ed(g)$, l'intersection des ensembles de définition de f et g, et qui est donc $D = \mathbb{R} - \{-3/2, 2\}$

(c) On a : pour $x \in D$,

$$\frac{3}{x-2} = \frac{7}{4x+6} + \frac{2}{x-2} \iff \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-2} = \frac{7}{4x+6}$$

$$\iff \frac{1}{x-2} = \frac{7}{4x+6} \iff 4x+6 = 7(x-2)$$

$$\iff \cancel{3x}\ 6+14 = 3x$$

$$\iff \boxed{x = \frac{20}{3}}, \quad \text{donc } S = \left\{\frac{20}{3}\right\}.$$

exercice 10 :

$f(x) \cdot g(x) = 0$ a come solutions $S(f) \cup S(g)$, les solutions de f et g.

<u>Cette méthode va être revu l'année prochaine et n'est pas aux objectifs du prochain test.</u>

(1) $(X-2)(X-3)=0$, $S = \{2\} \cup \{3\} = \{2,-3\}$

(2) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.$

on cherche donc a, b tels que $\begin{cases} ab = 3 \\ a+b = 4 \end{cases}$

on trouve $a=1$, $b=3$

donc $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$ et donc

$S = \{-1, -3\}$

(3) $(x+b)^2 = x^2 + 2b\cancel{x} + b^2$ alors on a que

$(x+b)^2 - b^2 + c = 0 \iff x^2 + 2bx + b^2 - b^2 + c = 0$

$\iff x^2 + 2bx + c = 0$

4) On utilise la partie 3,

$$x^2+2bx+c=0 \iff (x+b)^2=b^2-c.$$

et donc

$$x+b=\pm\sqrt{b^2-c} \iff x=\pm\sqrt{b^2-c}-b.$$

pour autant que $\underline{b^2-c\geq 0}$ ⚠

sinon si $b^2-c<0$ l'équation n'admet aucune solution réelle.

$$S=\emptyset.$$

- Si $b^2-c=0$, une seule solution $x=-b$, $S=\{-b\}$
- sinon deux solutions distinctes.

$$S=\{\sqrt{b^2-c}-b, \sqrt{b^2c}+b\}.$$

<u>Tout cela sera revu l'année prochaine</u>