Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 2 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit K un corps et $f(x) \in K[x]$ un polynôme de degré 3. Montrer que $f(x)$ est irréductible si et seulement si $f(x)$ n'a pas de racines en K.

Solution. ($\rightarrow$) *Si le polynôme $f(x)$ a une racine α en K, alors il a un facteur $x - \alpha$ et donc il est réductible.*

($\leftarrow$) *S'il est réductible, il admet alors un facteur de degré 1 sur K, c'est-à-dire que $(\beta x+\gamma)|f(x)$. Mais vu qu'on est dans un corps K, cela implique que l'élément $-\gamma/\beta$ est une racine de $f(x)$, ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi, $f(x)$ n'a pas de racines en K.*

Exercice 2. Soient des matrices $A, B, Q, D \in K^{n\times n}$ sur un corps K. Montrer que :

1. $\det(I + AB) = \det(I + BA)$ si A et B sont inversibles,
2. $\det(Q) = \pm 1$ si Q est orthonormale ($Q^T Q = I$),
3. $\det(A + zI)$ est un polynôme de $R[z]$ de degré n,[1]
4. $\det(D_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ si D est antidiagonale définie par

$$(D_n)_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i + j = n + 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} .$$

[1] Utiliser la formule du déterminant de Leibniz pour expliciter les coefficients du polynôme.

Solution. *1. Par la multiplicativité du déterminant,* $\det(I+BA) = \det(A)^{-1}\det(I+AB)\det(A) = \det(I+AB)$.

2. *Remarquons que* $1 = \det(I) = \det(Q^TQ) = \det(Q)^2$. *En outre, les seules racines du polynôme* x^2-1 *sur* K *sont* ± 1.

3. *La formule de Leibniz donne :*

$$\det(A+zI) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(A+zI)_{i,\sigma(i)}$$

Chaque terme de la somme est un polynôme en z *de degré égal au nombre de points fixes de la permutation* σ *en question, d'où le résultat.*

4. *Le développement de Laplace du déterminant de* D *par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne donne*

$$\begin{aligned}
\det(D_n) &= (-1)^{n+1}\det(D_{n-1}),\\
&= (-1)^{(n+1)+n}\det(D_{n-2}),\\
&= \dots,\\
&= (-1)^{(n+1)+n+\dots+3}\det(D_1),\\
&= (-1)^{(n+1)+n+\dots+3+2},\\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+n} = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.
\end{aligned}$$

Exercice 3.

i) Soit K un corps. Montrer : Un polynôme $p(x)$ divise chaque $f(x) \in K[x]$ si et seulement si $p(x) = a$ pour un élément $a \neq 0$ de K.

ii) Soit K un corps et $f(x), g(x) \in K[x] \setminus \{0\}$. On considère les assertions suivantes: a) $f(x) = ag(x)$, $a \in K \setminus \{0\}$. b) $f(x)$ et $g(x)$ ont les mêmes racines (avec multiplicité).

Montrer que a) implique b). Est-ce que b) implique a)? (Justifiez votre réponse)

Solution. *i) Si le polynôme $p(x)$ divise chaque $f(x) \in K[x]$, alors il divise aussi les polynômes de degré zéro, ce qui implique que lui-même doit avoir degré zéro, c'est-à-dire $p(x) = a$ pour un élément $a \neq 0$ de K.*

Pour l'autre direction on doit montrer que si $p(x) = a$ pour un élément $a \neq 0$ de K, alors $p(x)$ divise chaque $f(x) \in K[x]$. Ceci est évident car K est un corps.

ii) On montre d'abord que a) implique b). On sait que $f(x) = ag(x)$, avec $a \in K$. Si α est une racine de $g(x)$ avec multiplicité m alors $(x-\alpha)^m | g(x)$. Mais ça implique que $(x-\alpha)^m | ag(x) = f(x)$, et donc que α est aussi une racine de $f(x)$ avec multiplicité aux moins m. Si on a une racine de $f(x)$ avec multiplicité m, et on veut montrer que elle est aussi racine pour $g(x)$ avec une multiplicité aux moins m, la démonstration est similaire.

b) n'implique pas a). Ça on voit, par exemple en construisant deux polynômes $p_1(x) \neq p_2(x)$ sur K de degré au moins 2 qui n'ont pas de racines. Les polynômes $x \cdot p_1(x) \neq x \cdot p_2(x)$ ont seulement une racine, notamment 0 avec multiplicité 1.

Par exemple un peut choisir $K = \mathbb{Q}$, $p_1(x) = x^2 - 2$ et $p_3(x) = x^2 - 3$ sur $\mathbb{Q}$. (Ce sont des polynômes irréductibles mêmes, parce qu'ils n'ont pas de racines et sont de degré 2.) Mais $x \cdot p_1(x) \neq a \cdot x \cdot p_2(x)$ pour chaque $a \in K$.

Exercice 4. Cet exercice concerne Théorème 1.11 des notes du cours. Soient f et g deux polynômes sur K non tous deux nuls et soit

$$I = \{u \cdot f + v \cdot g \colon u, v \in K[x]\}.$$

Montrer que I est un sous-groupe de $(K[x], +)$ et que pour tout $h \in I$ et tout $w \in K[x]$, $h \cdot w \in I$. On appelle I l'*idéal* de $K[x]$ généré par f et g.

Solution. *Pour montrer que I est un sous-groupe, on vérifie d'abord que l'élément neutre* 0 *appartienne bien à I. On montre ensuite la stabilité de la loi de composition $+$ dans I, c'est-à-dire : $f+g \in I$ et $-f \in I$ pour tout $f, g \in I$.*

Pour la stabilité par multiplication externe, soit $h \in I$ et $w \in K[x]$. Alors

$$h = u \cdot f + v \cdot g,$$

et donc

$$w \cdot h = (w \cdot u)f + (w \cdot v)g \in I.$$

Exercice 5. (*) Soit K un corps, et $A \in K^{n \times n}$ une matrice inversible. Posons $\tilde{A} := (\mathrm{com}A)^T$, la transposée de la comatrice de A.[2]

1. Montrer que $\det(A) \neq 0$.
2. Montrer que $A^{-1} = \det(A)^{-1}\tilde{A}$.
3. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, il existe $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ telle que $AB = I$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

Solution.

[2]Rappel :

$$(\mathrm{com}A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}),$$

où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.