Prof. Friedrich Eisenbrand 10 mars 2023

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 2

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit K un corps et $f(x) \in K[x]$ un polynôme de degré 3. Montrer que $f(x)$ est irréductible si et seulement si $f(x)$ n'a pas de racines en K.

Exercice 2. Soient des matrices $A, B, Q, D \in K^{n\times n}$ sur un corps K. Montrer que :

1. $\det(I + AB) = \det(I + BA)$ si A et B sont inversibles,
2. $\det(Q) = \pm 1$ si Q est orthonormale ($Q^T Q = I$),
3. $\det(A + zI)$ est un polynôme de $R[z]$ de degré n,[1]
4. $\det(D_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ si D est antidiagonale définie par

$$(D_n)_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i + j = n + 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad .$$

[1] Utiliser la formule du déterminant de Leibniz pour expliciter les coefficients du polynôme.

Exercice 3.

i) Soit K un corps. Montrer : Un polynôme $p(x)$ divise chaque $f(x) \in K[x]$ si et seulement si $p(x) = a$ pour un élément $a \neq 0$ de K.

ii) Soit K un corps et $f(x), g(x) \in K[x] \setminus \{0\}$. On considère les assertions suivantes: a) $f(x) = ag(x)$, $a \in K \setminus \{0\}$. b) $f(x)$ et $g(x)$ ont les mêmes racines (avec multiplicité).

Montrer que a) implique b). Est-ce que b) implique a)? (Justifiez votre réponse)

Exercice 4. Cet exercice concerne Théorème 1.11 des notes du cours. Soient f et g deux polynômes sur K non tous deux nuls et soit

$$I = \{u \cdot f + v \cdot g \colon u, v \in K[x]\}.$$

Montrer que I est un sous-groupe de $(K[x], +)$ et que pour tout $h \in I$ et tout $w \in K[x]$, $h \cdot w \in I$. On appelle I l'*idéal* de $K[x]$ généré par f et g.

Exercice 5. (*) Soit K un corps, et $A \in K^{n \times n}$ une matrice inversible. Posons $\widetilde{A} := (\mathrm{com}A)^T$, la transposée de la comatrice de A.[2]

1. Montrer que $\det(A) \neq 0$.
2. Montrer que $A^{-1} = \det(A)^{-1}\widetilde{A}$.
3. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, il existe $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ telle que $AB = I$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

[2]Rappel :

$$(\mathrm{com}A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}),$$

où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.