EPFL - Printemps 2023	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 3	13 mars 2023

Les exercices indiqués par une étoile $\star$ sont optionnels.
Si vous le souhaitez, vous pouvez rendre votre solution de l'exercice bonus sur la page Moodle du cours avant le dimanche 26 mars, 18h.

Exercice 1.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier la réponse par un raisonnement ou un contre-exemple.

1. L'image d'un idéal bilatère par un homomorphisme d'anneaux est encore un idéal bilatère.
2. La préimage d'un idéal bilatère par un homomorphisme d'anneaux est encore un idéal bilatère.

Exercice 2.
Considérons l'homomorphisme

$$\xi_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[t] & \to & \mathbb{F}_p[t] \\ \sum_{i=0}^n a_i t^i & \mapsto & \sum_{i=0}^n [a_i] t^i \end{array}$$

qui envoye un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ au polynôme obtenu par réduction des coefficients mod p. Montrez que la préimage $\xi_p^{-1}(I)$ d'un idéal $I \in \mathbb{F}_p[t], I \neq 0, I \neq \mathbb{F}_p[t]$ n'est pas principal.

Exercice 3.
Cet exercice revoit des notions déjà connues dans le language des anneaux et des idéaux.
Soient m et n deux entiers naturels et (m) et (n) les deux idéaux principaux de $\mathbb{Z}$ correspondants.

1. **Identité de Bézout.** Soit d le pgdc de m et n. Montrer qu'il existe des entiers relatifs a, b tels que $am + bn = d$.
2. Identifier les idéaux $(m) \cdot (n)$, $(m) \cap (n)$ et $(m) + (n)$.

Exercice 4.
Soit $f \colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux.

1. Montrer que $\mathrm{car}(B)$ divise $\mathrm{car}(A)$, mais qu'en général $\mathrm{car}(B) \neq \mathrm{car}(A)$.
2. Montrer que si f est injectif alors $\mathrm{car}(B) = \mathrm{car}(A)$.
3. Montrer que si A est commutatif et $\mathrm{car}(A) = p$, un nombre premier, alors l'application $F \colon A \to A$ définie par $F(a) = a^p$ est un homomorphisme d'anneaux.
4. Calculer la caractéristique de l'anneau $\mathbb{Z}[i]/(i-2)$.

Exercice 5.
Soit $A = \mathbb{Z}/250\mathbb{Z}$.

1. Trouver tous les diviseurs de zéro et tous les éléments inversibles de A.

2. Trouver tous les idéaux de A qui contiennent l'élément $[50]_{250}$. (Ce qu'on veut dire par cette notation c'est l'image de 50 dans $\mathbb{Z}/250\mathbb{Z}$.)

Exercice 6.
Soit A le sous-anneau de $M_2(\mathbb{Z})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Montrez que le sous-ensemble K des matrices pour lesquelles $5 \mid a$ et $11 \mid b$ est un idéal bilatère et construire un isomorphisme (en deux temps) $A/K \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Exercice 7. 1. Montrer que $\mathbb{C}[x, y]/(x) \cong \mathbb{C}[y]$ (donner la forme explicite d'un isomorphisme).

2. Construire un homomorphisme d'anneaux $\mathbb{C}[x, y] \to \mathbb{C}[x] \times \mathbb{C}[y]$ dont le noyau est (xy).

3. Identifier l'image de cet homomorphisme et en conclure que $\mathbb{C}[x, y]/(xy)$ est isomorphe au sous-anneau de $\mathbb{C}[x] \times \mathbb{C}[y]$ formé des couples de polynômes $(p(x), q(y))$ tels que $p(0) = q(0)$.

Exercice 8 ($\star$).
Let $p \in \mathbb{N}$ be a prime number, ν_p be the p-adic valuation on $\mathbb{Q}$, and let R be the valuation ring of ν_p. (See, Exercice 8, Série 2)

1. Show that every $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ with $\nu_p(q) = 0$ is an invertible element of R.

2. Show that (0) and (p^n) for $n \in \mathbb{N}$ is a complete list of ideals of R, and that all ideals in this list are different.

3. Show that $R/(p^n) \cong \mathbb{Z}/(p^n)$

4. Denote by R_p the valuation ring we obtain for different choices of p. Show that the different R_p's as well as $\mathbb{Z}$ are pairwise non-isomorphic rings (here we ask for isomorphism as abstract rings, so not as subrings of $\mathbb{Q}$).

Exercice bonus 2.
Définition. Un anneau commutatif A est dit *connexe* si pour tout $a, b \in A$ tel que

$$a + b = 1 \quad \text{et} \quad ab = 0$$

alors exactement l'un des deux éléments est nul.

1. Montrer qu'un anneau commutatif est connexe si et seulement si A possède exactement deux idempotents.

   On dit que $e \in A$ un idempotent est un *idempotent minimal* si eA est un anneau connexe non-nul avec l'addition et la multiplication venant de A avec e comme élément neutre. On pose
   $$\pi_0(A) = \{e \in A \mid e \text{ est un idempotent minimal}\}$$
   Remarquer que A est connexe si et seulement si $\pi_0(A) = \{1\}$. Remarquer qu'un anneau connexe est toujours non-nul.

2. Soit $(A_i)_{i=1}^n$ une collection finie d'anneaux connexes. Montrer que
   $$|\pi_0(\prod_{i=1}^n A_i)| = n.$$

3. Montrer que
   $$|\pi_0(\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}])| = 3.$$