EPFL - Printemps 2023	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Corrigé – bonus 2	

Exercice bonus 2.
Définition. Un anneau commutatif A et dit *connexe* si pour tout $a, b \in A$ tel que

$$a + b = 1 \quad \text{et} \quad ab = 0$$

alors soit $a = 0$ et $b = 1$, soit $a = 1$ et $b = 0$.

1. Montrer qu'un anneau commutatif est connexe si et seulement les seuls idempotents de A sont 0 et 1.

   On dit que $e \in A$ un idempotent est un *idempotent minimal* si eA est un anneau connexe non-nul avec l'addition et la multiplication venant de A avec e comme élément neutre. On pose
   $$\pi_0(A) = \{e \in A \mid e \text{ est un idempotent minimal}\}$$
   Remarquer que A est connexe si et seulement si $\pi_0(A) = \{1\}$.

2. Soit $(A_i)_{i=1}^n$ une collection finie d'anneaux connexes. Montrer que
   $$|\pi_0(\prod_{i=1}^n A_i)| = n.$$

3. Montrer que
   $$|\pi_0(\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}])| = 3.$$

Solution.

1. Supposons tout d'abord que A est connexe. Soit $e \in A$ un idempotent. Alors $e + (1 - e) = 1$ et $e(1 - e) = 0$. Comme A est connexe, soit $e = 0$ ou $e = 1$. Réciproquement si les seuls idempotents sont 1 et 0, et $a, b \in A$ sont tels que $a + b = 1$ et $ab = 0$, alors $a = a(a + b) = a^2 + ab = a^2$. Ainsi a est idempotent et donc $a = 0$ ou $a = 1$, et par suite $b = 1$ ou $b = 0$.

   Barème. 10 points pour chaque direction de l'équivalence.

2. Soit $(e_i) \in \prod_{i=1}^n A_i$ un idempotent minimal. Notons qu'alors e_i est un idempotent dans A_i. Ainsi, comme les A_i sont supposés connexes, soit $e_i = 0$ ou $e_i = 1$. Comme un produit $B \times C$ d'anneau non-nuls n'est jamais connexe car
   $$(1_B, 0) + (0, 1_C) = 1_{B\times C} \quad (1_B, 0)(0, 1_C) = 0_{B\times C}$$
   on voit qu'il existe un unique i_0 tel que $e_{i_0} = 1$. Dès lors il y a exactement n idempotents minimaux donnés par $f_i = (\delta_{ij})$ pour $1 \leq i \leq n$.

   Barème. 10 points pour déterminer la forme des idempotents. 10 points pour identifier la forme des idempotents minimaux/un produit d'anneau non-nuls n'est jamais connexe. 10 points pour conclure/trouver les n idempotents minimaux.

3. Pour éviter toute confusion, on note $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, avec générateur x. On note que $\mathbb{Q}[G]$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 4, de base $1, x, x^2, x^4$ par définition d'anneau de groupe. On montre dans ce qui suit que le noyau de la surjection $\mathbb{Q}[t] \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} \mathbb{Q}[G]$ est (t^4-1). Premièrement, comme $x^4 = 1$, il suit que cet idéal est inclus dans le noyau. Supposons qu'il existe un polynôme $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \in \mathbb{Q}[t]$ de degré au plus 3 tel que $p(x) = 0$. Alors,
   $$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Comme $1, x, x^2, x^3$ est une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}[G]$, il suit que $a = b = c = d = 0$. Soit maintenant $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tel que $f(x) = 0$ avec $\deg(f(t)) > 3$. Par division euclidienne il existe $q(t), r(t) \in \mathbb{Q}[t]$ avec $\deg(r(t)) \leq 3$ avec

$$f(t) = q(t)(t^4 - 1) + r(t).$$

Ainsi $r(x) = 0$ et par suite grâce à l'étape précédente $r(t) = 0$. Ainsi on conclu par double inclusion que $(t^4 - 1) = \ker(\mathrm{ev}_x)$. On a dès lors,

$$\mathbb{Q}[G] \cong \mathbb{Q}[t]/(t^4 - 1).$$

Notons que $t^4 - 1 = (t^2 - 1)(t^2 + 1)$. On voit que la somme des idéaux $(t^2 - 1)$ et $(t^2 + 1)$ contient 1 car

$$\frac{t^2 + 1}{2} + \frac{1 - t^2}{2} = 1.$$

Ainsi, par le théorème des restes chinois, on a,

$$\mathbb{Q}[t]/(t^4 - 1) \cong \mathbb{Q}[t]/(t^2 - 1) \times \mathbb{Q}[t]/(t^2 + 1).$$

Comme $t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$ et que la somme des idéaux $(t - 1)$ et $(t + 1)$ contient 1 car

$$\frac{t + 1}{2} + \frac{1 - t}{2} = 1$$

on peut encore appliquer le théorème des restes chinois pour obtenir,

$$\mathbb{Q}[t]/(t^4 - 1) \cong \mathbb{Q}[t]/(t - 1) \times \mathbb{Q}[t]/(t + 1) \times \mathbb{Q}[t]/(t^2 + 1).$$

Avant de conclure, on montre que le noyau de la surjection $\mathbb{Q}[t] \xrightarrow{\mathrm{ev}_i} \mathbb{Q}[i]$ est $(t^2 + 1)$. Comme $\mathbb{Q}[i]$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 2, il suit que si $f(t) \in \ker(\mathrm{ev}_i)$ avec $\deg(f(t)) \leq 2$, alors $f(t) = 0$. Pour un élément quelconque du noyau, on se ramène à ce cas par division euclidienne, comme plus haut.

Ainsi, on conclut que

$$\mathbb{Q}[G] \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[i].$$

Comme un anneau intègre est connexe (car si $a, b \in A$ un anneau intègre tel que $ab = 0$, alors a ou $b = 0$.) On conclut ainsi que

$$|\pi_0(\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}])| = 3.$$

Barème. 20 points pour monter $\mathbb{Q}[G] \cong \mathbb{Q}[t]/(t^4 - 1)$. 10+10 points pour utiliser deux fois le théorème des restes chinois. 10 points pour montrer que $\mathbb{Q}[i] \cong \mathbb{Q}[t]/(t^2 + 1)$. 10 points pour conclure.

Remarque. Les idempotents minimaux de $\mathbb{Q}[G]$ sont :

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{4}, \quad \frac{1 - x + x^2 - x^3}{4}, \quad \frac{1 - x^2}{2}.$$

Remarque. Pour montrer que $\mathbb{Q}[G]$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[t]/(t^4 - 1)$ on peut utiliser l'adjonction $\mathbb{Q}[G] \dashv (-)^\times$ entre les $\mathbb{Q}$-algèbres et les groupes abéliens pour conclure que ces deux anneaux co-représentent tous deux le foncteur $\xi_4 : \mathbb{Q}\text{-Alg} \to \mathrm{Set}$

$$A \mapsto \{a \in A \mid a^4 = 1\}.$$