Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 3 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1.

1. (+) Soit V un espace vectoriel réel et soit $B = \{v_1, \dots, v_4\}$ une base de V. Soit f l'endomorphisme défini par

$$f(v_1) = v_1 - v_2, f(v_2) = 2v_2 - 6v_3, f(v_3) = -2v_1 + 2v_2, f(v_4) = v_2 - 3v_3 + v_4.$$

Écrivez la matrice A_B de l'application f dans la base $B = \{v_1, \dots, v_4\}$. Est-ce que f est inversible? Si oui, écrivez la matrice A_B^{-1} de l'application inverse $f^{-1} : V \longrightarrow V$.

2. Maintenant, soit g un autre endomorphisme défini par

$$g(v_1) = v_1 + 2v_2, g(v_2) = v_3 + v_4, g(v_3) = v_1 + v_2 + v_3, g(v_4) = 3v_2 - 2v_3.$$

Écrivez la matrice C_B de l'application g dans la base $B = \{v_1, \dots, v_4\}$. Est-ce que g est inversible? Si oui, écrivez la matrice C_B^{-1} de l'application inverse $g^{-1} : V \longrightarrow V$.

3. Maintenant soit $B' = \{w_1, \dots, w_4\}$ une autre base de V telle que

$$v_1 = w_1 + w_2, v_2 = w_3 + w_4, v_3 = w_1 + w_2 + w_3, v_4 = w_2 + w_4.$$

Écrivez la matrice $P_{BB'}$ de changement de base, c.à.d. $[v]_{B'} = P_{BB'}[v]_B$. Écrivez la matrice $A_{B'}$ de l'application f dans la base B', et la matrice $C_{B'}$ de l'application g dans la base B'.

Rappel:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_B"] & V \arrow[d, "\phi_B"] \\ K^n \arrow[r, "A"] & K^n \end{tikzcd}$$

Solution. *1.* $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *cette matrice a par colonnes les images des vecteurs de base. Par exemple, la première colonne est l'image de* v_1, *ce qu'on peut voir si on calcule* $A_B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Cette matrice a déterminant nul, donc l'inverse n'existe pas.*

2. $C_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C_B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. On écrit la matrice de changement de base P *de* B *a* B'. *On a que* $P = P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *alors* $P^{-1} = P_{B'B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Finalement, on a que* $A_{B'} = P_{BB'} A_B P_{B'B}$ *et* $C_{B'} = P_{BB'} C_B P_{B'B}$.

Exercice 2. Sachant que $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 5$, calculer $\det \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \\ 4d+3g & 4e+3h & 4f+3i \end{pmatrix}$.

Solution. *On sait que* det *est linéaire dans chaque ligne et qu'il est invariant par ajout d'un multiple d'une ligne* j *à une ligne* $i \neq j$. *Alors,*

$$\det \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \\ 4d+3g & 4e+3h & 4f+3i \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ 4d+3g & 4e+3h & 4f+3i \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ 4d & 4e & 4f \end{pmatrix} = 8 \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix} = -8 \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -8 \cdot 5 = -40\,.$$

Exercice 3. Factoriser $f(x) \in K[x]$ en polynômes irréductibles.

a) $f(x) = 3x^4 + 2$, $K = \mathbb{Z}_5$.

b) $f(x) = 3x^4 + 2$, $K = \mathbb{Z}_{11}$.

c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $K = \mathbb{Z}_7$.

d) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $K = \mathbb{Z}_3$.

e) $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, $K = \mathbb{Z}_{13}$.

f) $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, $K = \mathbb{Z}_{17}$.

Solution. *a) On vérifie si $f(x) = 3x^4 + 2$ a des racines en $\mathbb{Z}_5$. On commence avec 0: $f(0) = 2$ et donc 0 n'est pas racine. En suite, $f(1) = 5 = 0$ et donc 1 est racine. Alors on sait que $(x-1)$ divise $f(x)$. On fait la division sur $\mathbb{Z}_5$ et on trouve que $f(x)/(x-1) = 3x^3 + 3x^2 + 3x + 3$. On continue et on trouve que 2 est une racine pour $3x^3 + 3x^2 + 3x + 3$. Alors on divise pour $(x-2)$. En continuant ainsi, on arrive à la factorisation finale de $f(x)$ qui est $f(x) = 3(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)$.*

b) $f(x) = 3(x^2 + 5)(x + 4)(x + 7)$

c) $f(x) = (x + 5)(x + 3)(x + 1)$

d) $f(x) = (x + 1)(x + 2)^2$

e) $f(x) = (x + 12)(x + 11)(x^2 + 3x + 6)$

f) $f(x) = (x + 3)(x + 16)(x^2 + 15x + 6)$

Exercice 4. Calculer $\gcd(f, g)$ et $p, q \in F[x]$ t.q. $\gcd(f, g) = p \cdot f + q \cdot g$:

1. $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x^3 + 4x^2 + x + 1$, $K = \mathbb{Z}_5$
2. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $K = \mathbb{Z}_2$
3. $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 7x - 6$, $K = \mathbb{Q}$.

Solution. *1. On utilise l'algorithme d'Euclide pour calculer le $\gcd(f, g)$ et les coefficients p, q. On commence par diviser $g(x)$ par $f(x)$. On trouve que*

$$(x^3 + 4x^2 + x + 1) = (x^2 + 2)(x + 4) + (4x + 3).$$

En suite, on divise $x^2 + 2$ par le reste de la première division, c'est-à-dire par $(4x + 3)$. On trouve que

$$(x^2 + 2) = (4x + 3)(4x + 2) + 1.$$

Alors on a que $\gcd(f, g) = 1$ et que $(x+3)(x^3+4x^2+x+1)+(x^2+2)(4x^2+3x+4) = 1$.

2. On trouve que $\gcd(f, g) = x + 1$ et que $(x^3 + x^2)(x^2 + 1) + (1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x + 1$

3. On trouve que $\gcd(f, g) = x - 2$ et que

$$(-1/4x^3 - 1/4x^2 + 1/4x + 1/4)(x^2 - x - 2) + (1/4)(x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 7x - 6) = x - 2.$$

Exercice 5. (*) Soit K un corps, et $f, g \in K[x]$ deux polynômes pas tous les deux nuls. Considérons l'ensemble des diviseurs communs à f et g :

$$\mathcal{D}_{f,g} = \{d \in K[x] \ : \ d|f, d|g\}.$$

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $d \in \mathcal{D}_{f,g}$ unitaire et de degré maximal.

2. Montrer que $d = \gcd(f, g)$.

Solution.