Algèbre linéaire avancée II
printemps 2022

Série 3

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1.

1. (+) Soit V un espace vectoriel réel et soit $B = \{v_1, \dots, v_4\}$ une base de V. Soit f l'endomorphisme défini par

$$f(v_1) = v_1 - v_2, f(v_2) = 2v_2 - 6v_3, f(v_3) = -2v_1 + 2v_2, f(v_4) = v_2 - 3v_3 + v_4.$$

Écrivez la matrice A_B de l'application f dans la base $B = \{v_1, \dots, v_4\}$. Est-ce que f est inversible? Si oui, écrivez la matrice A_B^{-1} de l'application inverse $f^{-1} : V \longrightarrow V$.

2. Maintenant, soit g un autre endomorphisme défini par

$$g(v_1) = v_1 + 2v_2, g(v_2) = v_3 + v_4, g(v_3) = v_1 + v_2 + v_3, g(v_4) = 3v_2 - 2v_3.$$

Écrivez la matrice C_B de l'application g dans la base $B = \{v_1, \dots, v_4\}$. Est-ce que g est inversible? Si oui, écrivez la matrice C_B^{-1} de l'application inverse $g^{-1} : V \longrightarrow V$.

3. Maintenant soit $B' = \{w_1, \dots, w_4\}$ une autre base de V telle que

$$v_1 = w_1 + w_2, v_2 = w_3 + w_4, v_3 = w_1 + w_2 + w_3, v_4 = w_2 + w_4.$$

Écrivez la matrice $P_{BB'}$ de changement de base, c.à.d. $[v]_{B'} = P_{BB'}[v]_B$. Écrivez la matrice $A_{B'}$ de l'application f dans la base B', et la matrice $C_{B'}$ de l'application g dans la base B'.

Rappel:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_B} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_B} \\ K^n & \xrightarrow{A} & K^n \end{array}$$

Exercice 2. Sachant que $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 5$, calculer $\det \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \\ 4d+3g & 4e+3h & 4f+3i \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Factoriser $f(x) \in K[x]$ en polynômes irréductibles.

a) $f(x) = 3x^4 + 2$, $K = \mathbb{Z}_5$.

b) $f(x) = 3x^4 + 2$, $K = \mathbb{Z}_{11}$.

c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $K = \mathbb{Z}_7$.

d) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $K = \mathbb{Z}_3$.

e) $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, $K = \mathbb{Z}_{13}$.

f) $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, $K = \mathbb{Z}_{17}$.

Exercice 4. Calculer $\gcd(f, g)$ et $p, q \in F[x]$ t.q. $\gcd(f, g) = p \cdot f + q \cdot g$:

1. $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x^3 + 4x^2 + x + 1$, $K = \mathbb{Z}_5$
2. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $K = \mathbb{Z}_2$
3. $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 7x - 6$, $K = \mathbb{Q}$.

Exercice 5. (*) Soit K un corps, et $f, g \in K[x]$ deux polynômes pas tous les deux nuls. Considérons l'ensemble des diviseurs communs à f et g :

$$\mathcal{D}_{f,g} = \{d \in K[x] \ : \ d|f, d|g\}.$$

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $d \in \mathcal{D}_{f,g}$ unitaire et de degré maximal.
2. Montrer que $d = \gcd(f, g)$.