Cours Euler: Corrigé 26

le 29 mars 2023

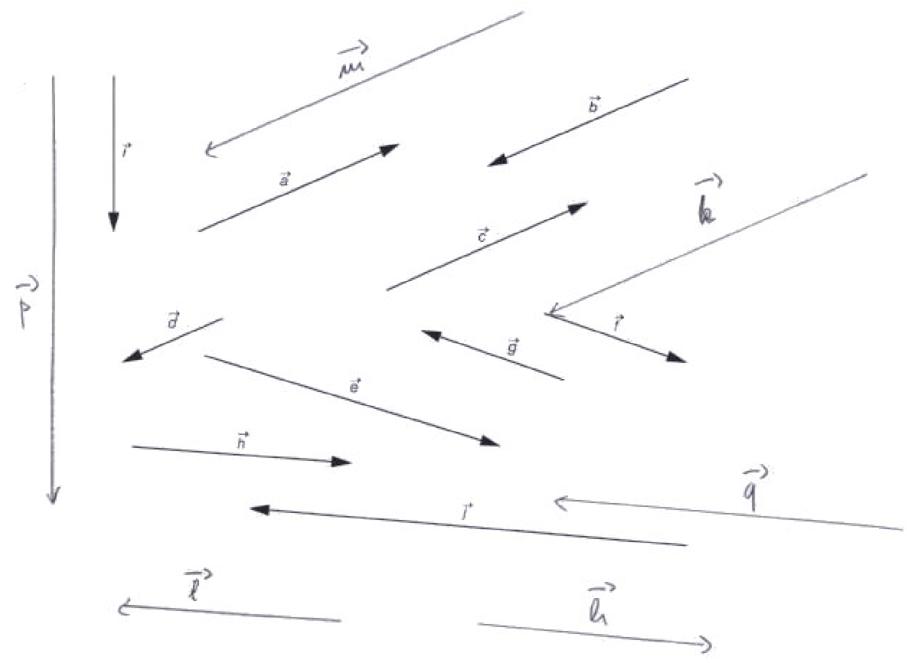
Exercice 1

(a) Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs droites sous-jacentes sont parallèles, leurs sens sont les mêmes et leur longueurs égales.

(b) Les égalités suivantes sont vérifiées :

1) $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{g}$
2) $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{c}$
3) $\overrightarrow{a} = -2\,\overrightarrow{d}$
4) $\overrightarrow{c} = -2\,\overrightarrow{d}$
5) $2\,\overrightarrow{f} = \overrightarrow{e}$
6) $-2\,\overrightarrow{g} = \overrightarrow{e}$

(c)



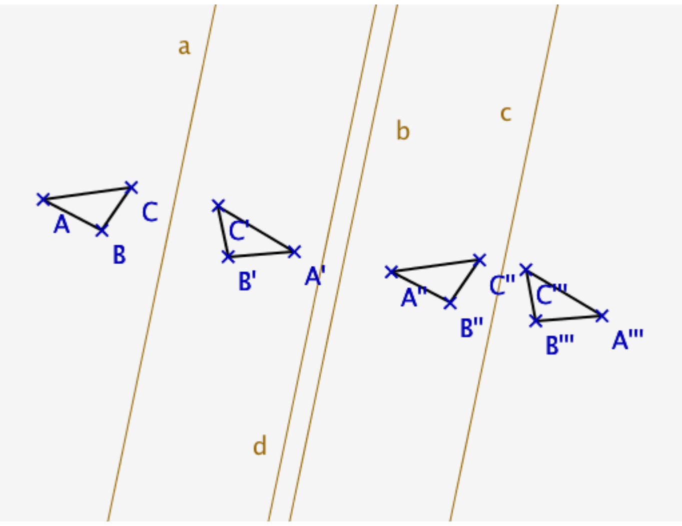
Exercice 2

Composition. Soit T une translation et R une rotation de centre O d'angle $\alpha \neq 0$. Montrons que $R \circ T$ est une rotation d'angle α. Le premier ou deuxième axe de symétrie de la translation peut être choisi arbitrairement, à condition qu'il soit perpendiculaire à la direction. Soit A un point du plan,

prenons a la droite perpendiculaire à $AT(A)$ passant par O et b l'unique droite telle que $T = S_a \circ S_b$ (elle est parallèle à a). Prenons comme premier axe de la rotation R la droite a, et c l'unique droite du plan telle que $R = S_c \circ S_a$. On a $R \circ T = S_c \circ S_a \circ S_a \circ S_b = S_c \circ S_b$. Comme on a supposé que R est une rotation non-nulle, on a $c \neq a$, donc c n'est pas perpendiculaire à $AT(A)$ et donc n'est pas parallèle à b, elles se coupent donc en un point P.
Ainsi $R \circ T$ est une rotation de centre P. D'après le théorème de la transversale, comme a et b sont parallèles, alors les angles alternes-internes formés par la transversale c sont isométriques, on a donc le même écartement entre a et c qu'entre b et c, la nouvelle rotation obtenue par la composition a donc le même angle, c'est juste le centre qui a changé.
Une démonstration similaire peut se faire dans le cas où l'on considère $T \circ R$.

Exercice 3

Composition de trois symétries axiales.

1. 

   Il s'agit d'une réflexion. En effet, supposons la condition plus faible que a, b et c sont trois droites de même direction. Considérons la composée $S_c \circ S_b \circ S_a$. Comme a et b sont de même direction, la composée $S_b \circ S_a$ est une translation. Rappelons qu'on peut choisir arbitrairement le premier axe (ou le deuxième) d'une translation parmi les droites perpendiculaires à la direction de la translation, l'autre étant alors uniquement déterminé. Donc la translation $S_b \circ S_a$ peut s'écrire $S_c \circ S_d$ pour une certaine réflexion S_d d'axe d. Ainsi,

   $$S_c \circ S_b \circ S_a = S_c \circ S_c \circ S_d = S_d$$

   est une réflexion.
   Pour trouver son axe, il suffit de tracer la médiatrice de $[AA''']$, c'est la droite d.

2. Ce cas a été traité dans la dernière série de géométrie du module précédent. Il s'agit d'une réflexion.

3. C'est un renversement sans point fixe. L'illustration se trouve après le résultat théorique ci-dessous. Pour la justification, utilise le fait que la composée de trois réflexions est soit un renversement sans point fixe, soit une réflexion, et le résultat suivant qui a été énoncé dans la théorie.
   Proposition
   Pour n'importe quelles trois droites a, b, c du plan, la composée $S_c \circ S_b \circ S_a$ est une réflexion si et seulement si a, b, c ont un point en commun ou si elles sont de même direction.
   Preuve
   " $\Rightarrow$ " : Supposons que $S_c \circ S_b \circ S_a$ soit égale à une réflexion S, c'est-à-dire $S_c \circ S_b \circ S_a = S$. On

peut composer les deux côtés de cette expression par S_a pour obtenir $S_c \circ S_b = S \circ S_a$. Alors, on sait que la composition de deux réflexions est soit l'identité, soit une rotation non triviale, soit une translation non nulle. On a donc trois cas :

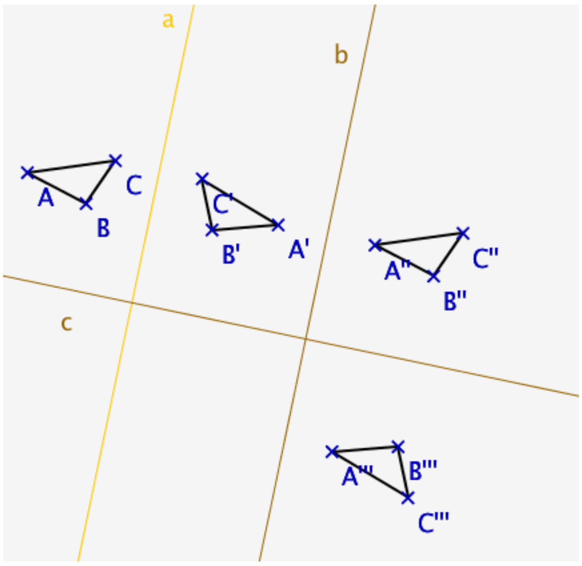
-$S_c \circ S_b$ est l'identité : alors $c = b$ et donc a, b, c ont au moins un point commun ou sont de même direction.

-$S_c \circ S_b$ est une rotation non triviale : alors $S_c \circ S_b$ et $S \circ S_a$ sont deux rotations de même centre. Les droites a, b et c ont donc un point commun.

-$S_c \circ S_b$ est une translation non nulle : alors $S_c \circ S_b$ et $S \circ S_a$ sont deux mêmes translation, on a donc que a, b et c sont de même direction.

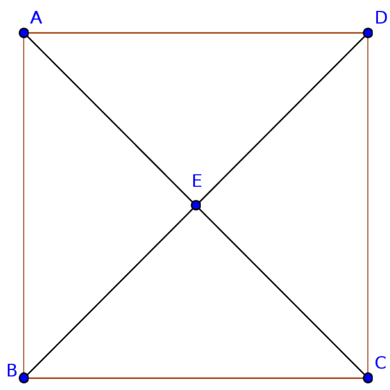
" $\Leftarrow$ " : Si a, b, c sont de même direction, alors nous avons déjà démontré en 1) que $S_c \circ S_b \circ S_a$ est une réflexion.

Supposons maintenant que a, b, c ont au moins un point commun. Si a, b, c sont concourants, alors nous avons déjà démontré en 2) que $S_c \circ S_b \circ S_a$ est une réflexion. Si $a = b$, alors la composée égale S_c. Si $b = c$, alors la composée égale S_a. Si $a = c$, notons que $S_b \circ S_a$ est une rotation et choisissons a pour deuxième axe, c'est-à-dire $S_b \circ S_a = S_a \circ S$ pour une réflexion S. Or, $S_c \circ S_b \circ S_a = S_c \circ S_a \circ S = S_c \circ S_c \circ S = S$, une réflexion. Nous avons démontré la proposition.



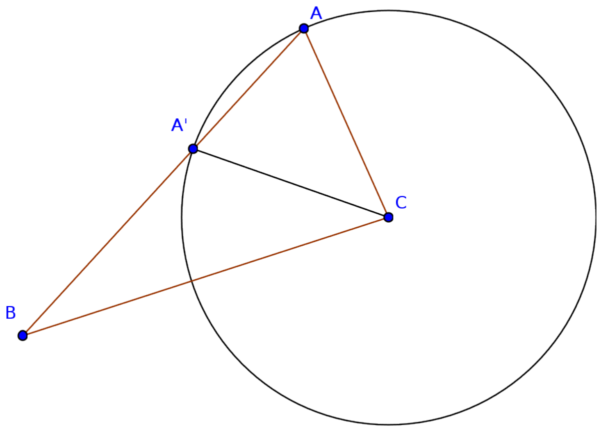
Exercice 4

1. Les triangles $\triangle ABC$ et $\triangle BCE$ de l'illustration suivante



satisfont $\overline{BC} = \overline{BC}$, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{EBC}$ sont isométriques et les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{ECB}$ sont isométriques, mais les deux triangles ne sont pas isométriques.

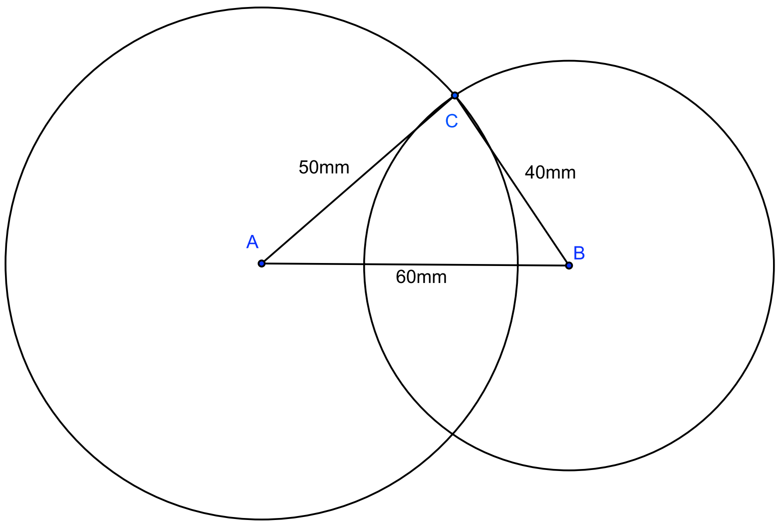
2. Les triangles $\triangle ABC$ et $\triangle A'BC$ de l'illsutration suivante



satisfont $\overline{AC} = \overline{A'C}$, $\overline{BC} = \overline{BC}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'BC}$, mais les deux triangles ne sont pas isométriques.

Exercice 5

(1) On donne la marche à suivre pour le premier cas sous la forme demandée en général.
1. Tracer un segment $[AB]$ de longueur $60mm$.
2. Tracer un cercle Γ de centre A et de rayon $50mm$
3. Tracer un cercle Γ' de centre B et de rayon $40mm$.
4. Les deux cercles Γ et Γ' s'intersectent en deux points, on peut choisir un de ces deux points pour le sommet C.



(2) Commencer par le segment le plus long, ensuite on se rend compte que les deux cercles de rayon $40mm$ et $30mm$ ne s'intersectent pas, un tel triangle n'existe donc pas. En général, pour qu'un triangle existe, il faut que la longueur de chacun des côtés sont inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés, ce qui n'est pas le cas ici.

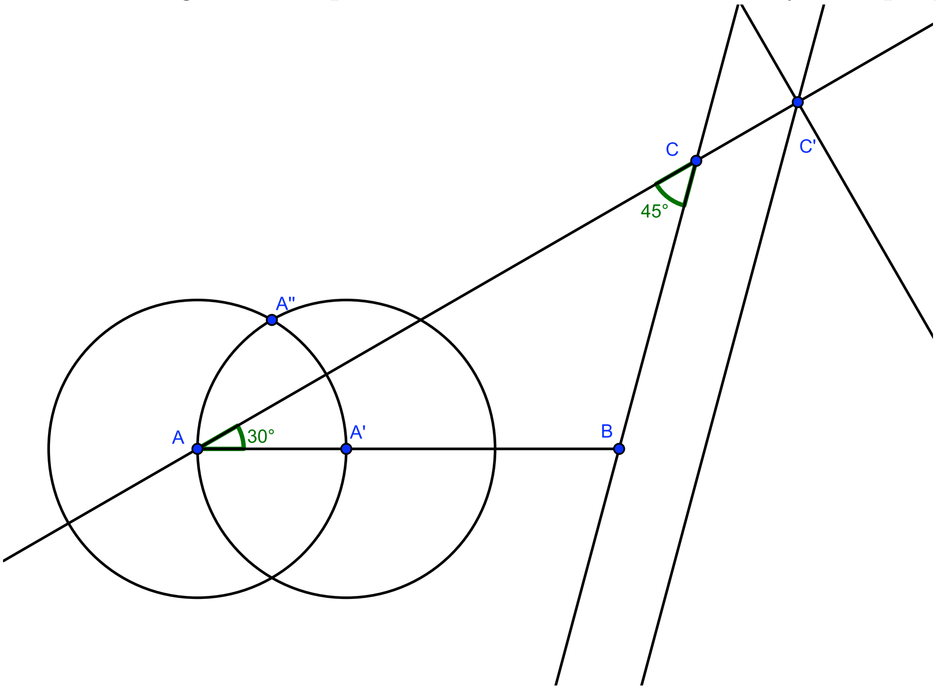
(3) Ce cas est similaire au premier.

Exercice 6

Pour construire un angle de $30°$ en A, une façon est de construire un angle de $60°$, et d'en prendre la bissectrice. Ce sont les points 2 et 3 ci-dessous qui expliquent comment obtenir un angle $\widehat{A'AA''}$ de $60°$.

Marche à. suivre :
1. Tracer le segment AB de longueur $85mm$.
2. Tracer un cercle Γ de centre A et de rayon quelconque, disons r, de telle sorte que ce cercle intersecte le segment AB en un point que nous nommons A'.
3. Tracer ensuite un cercle de même rayon r et de centre A', ce cercle intersecte le premier cercle en un point A''.
4. Construire la bissectrice b de l'angle $\widehat{A'AA''}$.
5. Construire la perpendiculaire à la droite b en un point C' quelconque.
6. Construire la bissectrice d de l'angle de $90°$ ainsi formé.
7. Tracer la parallèle c à d passant par B.
8. Le point C est alors déterminé par l'intersection de cette c et de la droite b.

La figure contient cette construction où les points 5, 6 et 7 permettent d'obtenir l'angle de $45°$ en C, L'autre triangle obtenu par la même construction serait symétrique par $[AB]$ et donc isométrique.



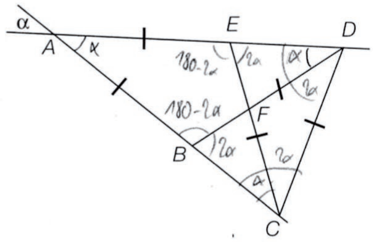
Ainsi, l'intuition à avoir concernant à la question posée "deux triangles ayant deux angles isométriques et un côté opposé à l'un de ces angles isométrique sont-ils isométriques ?" est de remarquer qu'en faisant la construction, il y a deux choix possibles de triangles, et que ces deux triangles sont isométriques. Donc le résultat semble vrai, et pour s'en convaincre complètement, il reste à le prouver. Pour cela, considérons donc deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que AB et $A'B'$ sont isométriques et tels que les angles α (en A), γ (en C) sont respectivement isométriques à α' (en A'), γ' (en C'). Alors comme la somme des angles dans un triangle vaut $180°$, on connaît les angles β (en B) et β' en (en B'), et on sait qu'ils sont isométriques. Alors on applique ensuite le premier cas d'isométrie des triangles et on a le résultat.

Exercice 7

Notons a l'hypoténuse égale dans les deux triangles, b la cathète égale et c_1 respectivement c_2 la cathète restante du premier respectivement du deuxième triangle. Par le théorème de Pythagore, comme le premier triangle est rectangle en A, on a que $b^2 + c_1^2 = a^2$, comme le second est aussi rectangle, on a que $b^2 + c_2^2 = a^2$. En égalant ces deux égalités on obtient que $c_1^2 = c_2^2$ et donc, comme c_1 et c_2 sont positifs, on a $c_1 = c_2$. Ainsi nos deux triangles sont dans le troisième cas d'isométrie des triangles.

Exercice 8

- $\widehat{CAD} = \alpha$ (angles opposés par le sommet) ;
- les triangles ABD, AEC, ECD et BDC sont isocèles, avec des côtés isométriques qui mesurent une « allumette » ;



- $\widehat{ADB} = \widehat{ACE} = \alpha$ (les triangles ABD et AEC étant isocèles) ;
- $\widehat{DBC} = \widehat{CED} = 2\alpha$ (ce sont les angles extérieurs aux triangles ABD et AEC) ;
- $\widehat{EDC} = \widehat{BCD} = 2\alpha$ (les triangles ECD et BDC étant isocèles) ;
- comme $\widehat{EDC} = \widehat{ADC}$ et $\widehat{BCD} = \widehat{ACD}$, on a dans le triangle ACD $\widehat{CAD} + \widehat{ADC} + \widehat{ACD} = 5\alpha = 180°$;
- finalement, si $5\alpha = 180°$, alors $\alpha = 36°$.

Exercice 9

Une pause logique. Aladin étant doté d'un bon esprit logique, il ressort une pièce de la caisse dont l'étiquette dit qu'elle contient un mélange d'or et de cuivre. Si elle est en or, il choisira cette caisse bien sûr (celle qui indique or sera donc celle du cuivre, la dernière qui indique cuivre contiendra un mélange). Si par contre la pièce est en cuivre, il choisira la caisse étiquetée “Cuivre”, puisque celle qui indique “Or” contiendra alors le mélange de pièces. Un petit tableau peut aider à visualiser la solution.