Cours Euler: Corrigé 27

le 5 avril 2023

Exercice 1

(a) L'axe de symétrie du triangle BAC est la droite b. L'image de B est C, et l'image de M est M. L'image de $[BM]$ est donc $[MC]$.
La longueur de $[BM]$ égale la longueur de $[MC]$, car la symétrie présèrve les longueurs. La symétrie est une isométrie.
Conclusion : La symétrie b envoie B sur C. Or par le théorème de la médiatrice, il existe une unique symétrie qui envoie un point sur un autre, la médiatrice de ces deux points.

(b) b est perpendiculaire à $[BC]$. **Conclusion :** Comme b est la perpendiculaire à $[BC]$ passant par A, alors $[AM]$ est la hauteur relative à $[BC]$.

(c) M est le milieu de $[CB]$. **Conclusion :** $[AM]$ est la médiane de relative à $[BC]$.

Exercice 2

(a) $\widehat{C} = 180 - \widehat{A} - \widehat{B} = 180 - 60 - 65 = 55°$
$\widehat{D}_1 = 360 - \widehat{DEC} - \widehat{C} - \widehat{B} = 360 - 120 - 55 - 65 = 120°$
$\widehat{E}_1 = 180 - 120 = 60°$

(b) DAE est équilatéral, car tous ses angles mesurent 60°.

(c) Non, les droites DE et BC ne sont pas parallèles. En effet, supposons qu'elles soient parallèles. Alors les angles $\widehat{E}_1$ et $\widehat{C}$ sont correspondants, donc par le théorème de la transversale, ils sont isométriques. Or, ce n'est pas possible, car l'un mesure 55° et l'autre 60°.

Exercice 3

Vrai ou Faux ?

(a) Tout triangle équilatéral est isocèle. C'est vrai. Si les trois côtés du triangle sont isométriques, a fortiori deux côtés le sont.

(b) Il existe un triangle rectangle qui est équilatéral. C'est faux. Les trois angles d'un triangle équilatéral sont isométriques (et valent donc 60°). Il n'y a donc aucun angle droit.

(c) Il existe un triangle rectangle qui est isocèle. C'est vrai. Les deux angles isométriques de ce triangle valent 45°.

(d) Il existe un triangle isocèle dont deux angles valent 1°. C'est vrai. Le troisième angle vaut alors 178°. C'est un triangle très "plat", mais c'est un triangle.

Exercice 4

Equations.

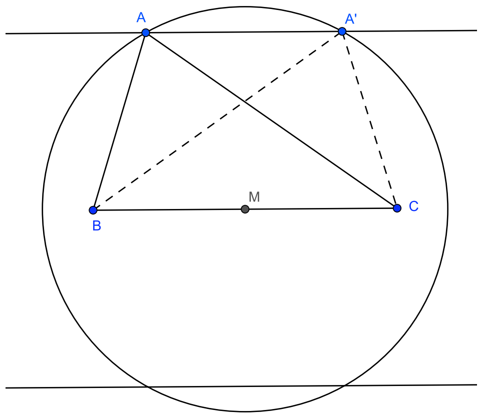
1. D'un triangle rectangle on sait que qu'un angle aigu vaut le triple de l'autre angle aigu. Quelle est la mesure de chacun des trois angles de ce triangle ?
   Soit x le plus petit angle aigu. L'autre angle aigu vaut donc $3x$. Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180°, on a donc l'équation
   $$x + 3x + 90 = 180$$
   Par conséquent $4x = 90$ et donc $x = 22{,}5°$. Les trois angles du triangle valent 90°, 22,5° et 67,5°.

2. On trace une hauteur d'un triangle équilatéral pour former deux triangles rectangles. Ils sont isométriques puisque la hauteur est aussi la médiane, si bien qu'ils ont leurs trois côtés isométriques deux à deux. Les angles valent alors 90°, 60° et 30°.
3. a) $180 = 90 + 2x + x = 90 + 3x$ donc $x = 30°$. De plus, $\hat{A} = 90°$. $\hat{B} = 60°$ et $\hat{C} = 30°$.
   b) $3x = 180$ car c'est un triangle équilatéral. Donc $x = 60°$. De plus, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$.
4. c) $\widehat{A} = \widehat{C}$ car le triangle est isocèle en B. Donc $180 = 3x + 3x + 2x = 8x$ donc $x = 22.5°$. De plus, $\hat{A} = 67,5°$. $\hat{B} = 45°$ et $\hat{C} = 67,5°$.
   c) $\widehat{ACB}$ et $\widehat{BCD}$ sont supplémentaires, donc $180 = x + 4x = 5x$ donc $x = 36°$. De plus, $\hat{A} = 72°$. $\hat{B} = 72°$ et $\hat{C} = 36°$.
   c) On a que $\widehat{A} = \widehat{C}$ et $\widehat{B} = \widehat{D}$. De plus, la somme des angles d'un parallélogramme est 360°. Donc $360 = 2x + x + 2x + x = 6x$ donc $x = 60°$. De plus, $\hat{A} = 120°$. $\hat{B} = 60°$ et $\hat{C} = 120°$.

Exercice 5

(1) Traçons le segment $[BC]$ de longeur donnée. A l'aide du compas déterminons le point milieu de ce segment, appelons-le M. Traçons un cercle de centre M et de rayon g_A. Traçons les deux parallèles au segment $[BC]$ à une distance de h_A chacune du segment BC. Les quatres points d'intersection des deux parallèles avec le cercle sont autant de possibilités pour le point A.

(2) Voici la construction :



(3) La figure ci-dessus ne représente qu'une des deux parallèles possibles à la droite BC et à une distance h_A de BC. En fait, en notant A'' et A''' les points d'intersection de cette seconde parallèle avec le cercle, on obtient au total quatre triangles BCA, BCA', BCA'', BCA''' dont on veut montrer qu'ils sont isométriques. Pour prouver ce résultat, on utilise le fait que les triangles sont images l'un de l'autre soit par la symétrie axiale d'axe BC, soit par la symétrie axiale d'axe la médiatrice du segment BC, qui sont des isométries.

Exercice 6

Pour l'instant nous n'avons pas les moyens de faire de nombreuses observations. Voilà une conclusion que l'on peut tirer. La droite AN est la médiatrice de $[BC]$. Donc puisque la médiatrice de $[BC]$ passe par A, alors AN est aussi la bissectrice de $\widehat{A}$. Donc ABC est isocèle en A (par la proposition du cours sur les triangles isocèles). Nous en concluons que les angles en A et en C sont isométriques et que $\overline{AB} = \overline{AC}$ par exemple.
Nous verrons plus tard que $[MN]$ est parallèle à $[AC]$ et la longueur de ce segment vaut la moitié de $\overline{AC}$. Le triangle ΔBMN est isocèle en M... Nous devons encore étudier les similitudes pour pouvoir comprendre cela.

Exercice 7

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que l'angle en A mesure 36°. Nous savons alors que les deux autres angles, en B et en C sont isométriques et valent tous deux 72°. Ainsi la bissectrice issue de B partage cet angle en deux angles de 36°.
Appelons D le pied de la bissectrice sur le segment $[AC]$. Ce point détermine deux triangles ΔABD et ΔBCD. Tous deux sont isocèles. En effet le premier a deux angles égaux à 36°, celui en A et celui en B, le second a deux angles égaux à 72°, celui en C et celui en D.

Exercice 8

Cas d'isométrie des triangles isocèles. Dans cet exercice nous utilisons sans faire référence la proposition qui liste des caractérisations équivalentes d'un triangle isocèle.
Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles isocèles respectivement en A et A'. Nous allons montrer que $\hat{B} = \hat{B}'$ et $\hat{C} = \hat{C}'$. Comme ABC est isocèle en A, on a $\hat{B} = \hat{C}$ et donc $\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$ car 180° est la somme des angles dans un triangle. Similairement, $\hat{B}' = \hat{C}' = \frac{180^\circ - \hat{A}'}{2}$. En utilisant que $\hat{A} = \hat{A}'$ par hypothèse, on déduit que

$$\hat{B} = \hat{C} = \hat{B}' = \hat{C}'.$$

1) Si $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, alors ABC et $A'B'C'$ ont un côté isométrique compris entre deux angles respectivement isométriques. Ainsi ABC et $A'B'C'$ sont isométriques par le premier cas d'isométrie des triangles.
2) Si les hauteurs h_A issue de A et $h_{A'}$ issue de A' sont isométriques, dénotons $M = h_A \cap BC$ et $M' = h_{A'} \cap B'C'$. Notons que $\widehat{BAM} = \hat{A}/2 = \hat{A}'/2 = \widehat{B'A'M'}$ et que $\widehat{BMA} = 90^\circ = \widehat{B'M'A'}$. Ainsi les triangles BAM et $B'A'M'$ sont isométriques par le premier cas d'isométrie des triangles. Donc, $\overline{CA} = \overline{BA} = \overline{B'A'} = \overline{C'A'}$. On conclut que ABC et $A'B'C'$ sont isométriques par le deuxième cas d'isométrie des triangles.

Exercice 9

Comme le triangle ΔABD est isocèle en A, on en déduit que les angles en B et en D sont isométriques. Leur somme vaut $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ si bien que chacun vaut 50°.
Le triangle ΔCBD aussi est isocèle, en C. Ainsi l'angle en D vaut 48°. Finalement l'angle en C vaut $180^\circ - 2 \cdot 48^\circ = 84^\circ$. Le quadrilatère $ABCD$ n'est pas un parallélogramme, sinon les angles alternes-internes déterminés par deux droites parallèles devraient être égaux.

Exercice 10

1. Etant donné l'angle $\hat{A} = Sb'c'$ et la base $[BC]$ d'un triangle ABC, nous devons construire le triangle ABC.
Marche à suivre :
— Construire la bisectrice d de l'angle $\hat{A}$
— Construire une perpendiculaire à d qui intersecte la demi-droite b' dans un point C' et la demi-droite c' dans un point B'
— Reporter l'angle $\widehat{C'B'S}$ sur la demi-droite $[BC$
— Reporter l'angle $\widehat{B'C'S}$ sur la demi-droite $[CB$ tel que son deuxième côté intersecte le deuxième côté de l'angle reporté sur $[BC$ dans un point. C'est le sommet A du triangle recherché.

Justification : Le triangle construit a base $[BC]$. Il reste à montrer que la mesure de l'angle en A du triangle construit égale la valeur donnée $\hat{A}$. Or, la mesure de l'angle en A vaut

$$180^\circ - \widehat{CBA} - \widehat{BCA} = 180^\circ - \widehat{C'B'S} - \widehat{B'C'S} = \hat{A}.$$

2. Marche à suivre :

— Tracer un segment $[AB]$ de longueur r
— Construire un point C à distance r de A et de B. Alors l'angle $\widehat{ABC}$ est un angle de mesure $60°$.

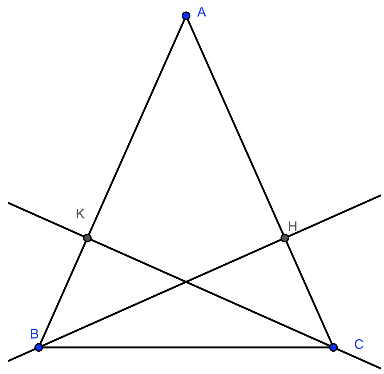
Justification : Les angles d'un triangle équilatéral sont chacun de mesure $60°$, donc pour faire la construction demandée, on peut construire l'angle d'un triangle équilatéral quelconque.

Exercice 11

Traçons un triangle ABC et supposons que les deux hauteurs isométriques sont celles issues de B et C. Notons H le pied de la hauteur issue de B et K celui issue de C. Les triangles BHA et CKA sont isométriques par le premier cas d'isométrie des triangles. En effet,

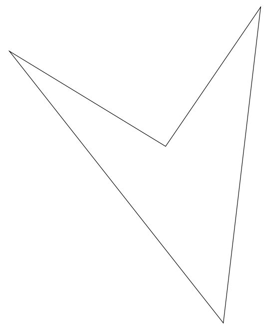
$$\begin{aligned} \widehat{BHA} &= 90° = \widehat{CKA}, \\ \widehat{HBA} &= 90° - \hat{A} = \widehat{KCA} \text{ et} \\ \overline{BH} &= \overline{CK} \end{aligned}$$

par hypothèse. Donc, le premier cas d'isométrie s'applique. En particulier $\overline{BA} = \overline{CA}$, ce qui était à démontrer.

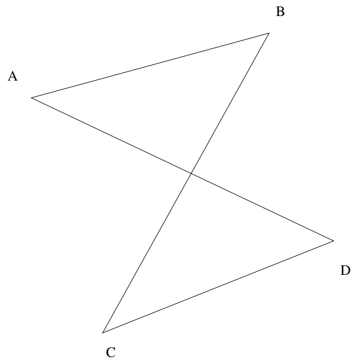


Exercice 12

1. Oui, un carré est simple et convexe.
2. Oui, le quadrilatère suivant est simple et non convexe :



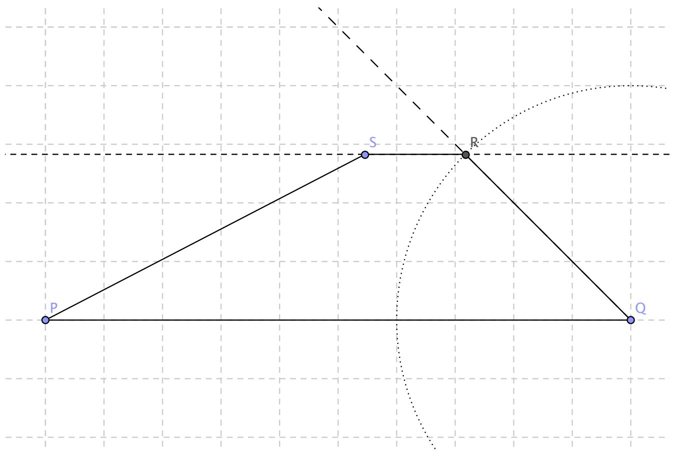
3. Non, tout quadrilatère non simple doit être non convexe, car tout polygone convexe est simple, par définition.
4. Oui. Puisque tout quadrilatère non simple est non convexe, il suffit de donner un quadrilatère non simple. Le quadrilatère $ABCD$ suivant est non simple :



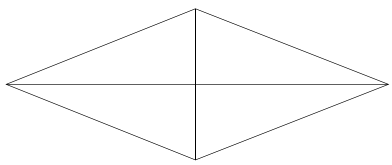
Exercice 13

Les trapèzes. (a) Voici la marche à suivre :

- tracer le segment $[PQ] = 10cm$;
- construire un angle de 45° en Q (angle droit puis bissectrice) ;
- reporter une distance $4cm$ sur la droite obtenue, et placer le point R, puis tracer le segment $[QR]$;
- construire la parallèle a à PQ passant par R ;
- le point S peut être n'importe où sur la droite a, hormis le point R.



(b) Un trapèze admettant un axe de symétrie n'est pas forcément isocèle. En effet, un losange admet comme axe de symétrie une de ses diagonales, mais les médiatrices des côtés opposés ne sont pas forcément confondus.

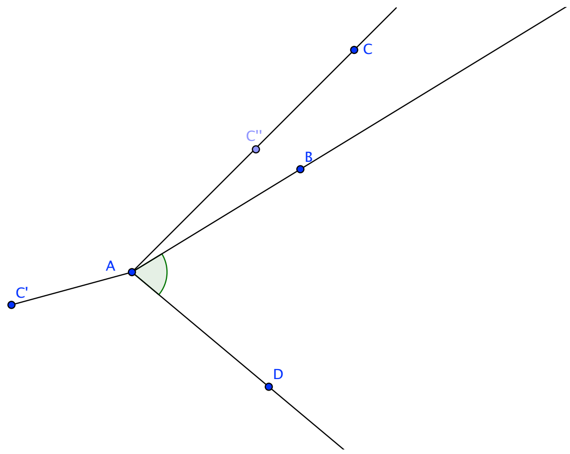


Exercice 14

Un peu de théorie : Les parallélogrammes. Soit $ABCD$ un quadrilatère simple. On suppose que les côtés opposés AB et CD sont parallèles et isométriques.

1. Supposons par l'absurde que le quadrilatère est simple, mais que les deux diagonales du quadrilatère se trouvent à l'extérieur des angles aux sommets dont elles sont issues.

   La somme des angles d'un quadrilatère simple vaut 360°. Seul un angle peut donc mesurer plus de 180°. Lorsque nous considérons une diagonale, nous pouvons donc choisir un sommet en lequel l'angle est plus petit. Disons que pour la diagonale $[AC]$ il s'agit de A. Par hypothèse la diagonale se trouve à l'extérieur de l'angle $\widehat{DAB}$. L'intérieur de l'angle est l'intersection de deux demi-plans déterminés par les droite AB et AD (c'est pour cela que nous nous sommes arrangés pour considérer un angle "petit").



Le sommet C ne se trouve pas à l'intérieur de cet angle. Il doit donc être de l'autre côté de l'une des droites AB (ou AD) que le sommet D (ou B). Pour fixer les idées et quitte à renommer les sommets, nous sommes dans l'une des situations indiquées sur la figure ci-dessus. Le point C se trouve de l'autre côté de AB que D (dans le cas de C', il se trouve aussi de l'autre côté de AD que B). Où peut se trouver C ? Il ne peut se trouver dans le cas de C'' dans l'intérieur de l'angle opposé à $\widehat{BAD}$, car dans ce cas l'angle $\widehat{BAD}$ est à l'extérieur du quadrilatère ! Il se trouve donc dans la situation de C (ou C'') sur une demi-droite issue de A à l'intérieur de l'angle adjacent-supplémentaire.

Il y a maintenant deux possibilités. Le point C se trouve de l'autre côté de la droite BD que A. C'est le cas du point C de la figure ! Alors la deuxième diagonale $[BD]$ se trouve à l'intérieur de l'angle $\widehat{ADC}$, ce qui contredit l'hypothèse. La deuxième possibilité est que C – comme c'est le cas du point C'' sur l'illustration – se trouve du même côté de BD que A. Mais alors $[DC]$ coupe $[AB]$. Le quadrilatère n'est pas simple.

Dans tous les cas on arrive à une contradiction. Ouf.

2. On suppose dès maintenant que la diagonale $[AC]$ passe entre B et C. On prend le milieu O de cette diagonale et on considère l'isométrie S_O, symétrie centrale de centre O.

   Alors S_O transforme A en C. Une symétrie centrale transforme une droite ne passant pas par le centre de symétrie en une droite parallèle si bien que S_O transforme AB en CD. Enfin, comme C se trouve à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAD}$, $S_O(B)$ se trouve sur la droite CD du même côté de C que D. Ceci prouve que S_O transforme la demi-droite $[AB$ en la demi-droite $[CD$.

3. De plus, S_O préserve les distances. Donc $S_O(B)$ se trouve sur la demi-droite $[CD$ à la même distance de C que B de A. Or, nous savons que les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont isométriques (ils ont même longueur). Par conséquent $S_O(B) = D$ et S_O transforme le segment $[AB]$ en $[CD]$.

4. Pour conclure, S_O transforme B en D et donc D en B. En particulier S_O transforme la droite DA en BC : Ces droites ne passent pas par O et doivent donc être parallèles. Nous en déduisons que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.