Cours Euler: Corrigé 30

le 10 mai 2023

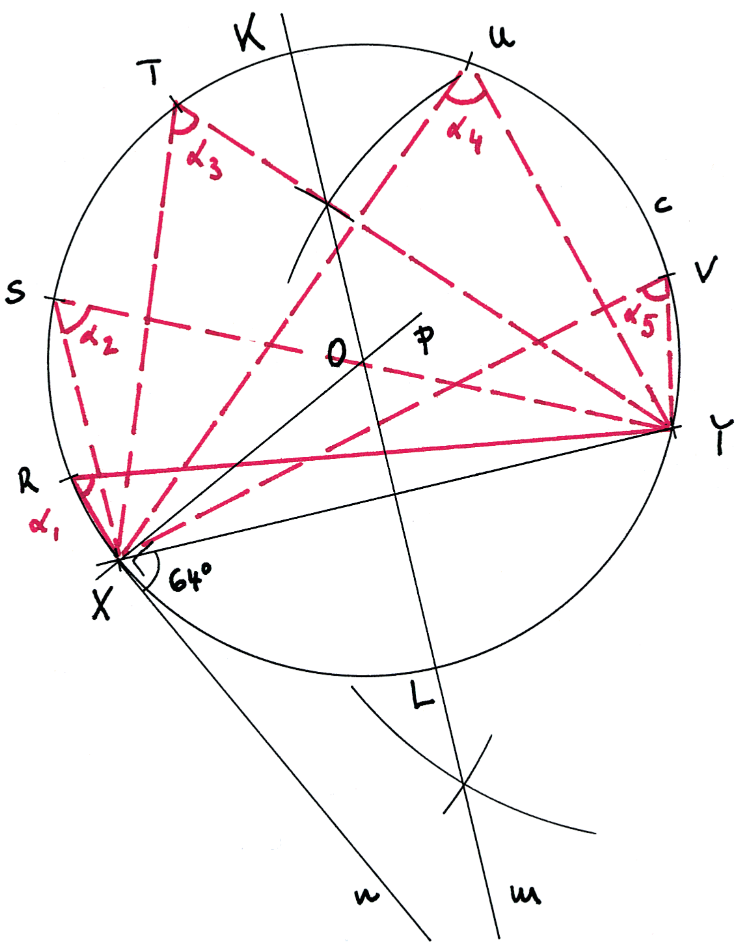
Exercice 1

Corrigé

79.

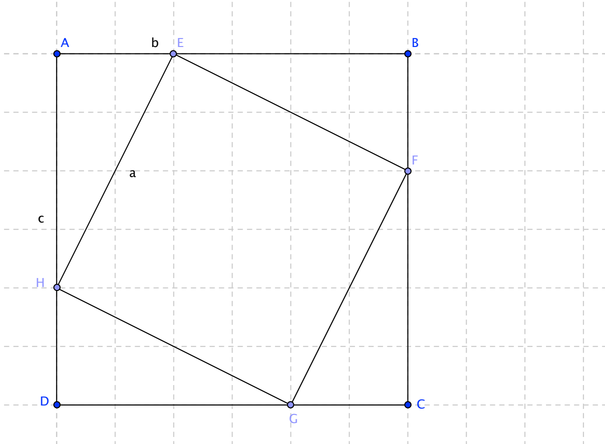
Les angles α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 mesurent tous 64° ou 116°, suivant comment sont placées les lettres *R*, *S*, *T*, *U* et *V*.

Ce sont des angles inscrits qui ont tous le même angle au centre $\widehat{XOY} = 128°$.



Exercice 2

Théorème de Pythagore.
Voici la construction du carré et des quatre triangles rectangles :



Les triangles ΔAEH, ΔBFE, ΔCGF et ΔDHG sont des triangles rectangles en leur premier sommet puisque les côtés issus de ce sommet sont supportés par les côtés du carré $ABCD$. Ces côtés sont de longueur b et c. Les quatre triangles sont donc isométriques par le second cas d'isométrie (un angle isométrique compris entre deux côtés isométriques).

On déduit de cela que les hypoténuses $[EH]$, $[EF]$, $[FG]$ et $[GH]$ sont toutes isométriques. Le quadrilatère $EFGH$ est donc un losange. Pour montrer qu'il s'agit d'un carré, il faut encore montrer que ses angles sont des angles droits. On peut voir ceci de plusieurs façons.

1. Par symétrie par exemple puisqu'une rotation de 90° préserve la figure : ainsi tous les angles de ce losange sont isométriques et mesurent donc 90°.
2. Plus "terre-à-terre", on constate que la somme des angles $\widehat{AHE}+\widehat{DHG}$ vaut 90 degrés, puisqu'il s'git des deux angles non droits d'un triangle rectangle. L'angle $\widehat{EHG}$ est supplémentaire, il vaut donc aussi 90°.

Chacun des côtés de ce carré est l'hypoténuse de l'un des triangles rectangles isométriques. Il mesure donc a.

L'aire de ce carré vaut $a \cdot a = a^2$ (formule de l'aire d'un rectangle). L'aire de chacun des quatre triangles vaut $\frac{1}{2}b \cdot c = \frac{bc}{2}$. Le grand carré de côté $b + c$ a pour aire

$$(b + c) \cdot (b + c) = b^2 + 2bc + c^2$$

Par conséquent, par l'axiome de "découpage", nous savons que

$$a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2} = b^2 + 2bc + c^2$$

On soustrait $2bc$ de part et d'autre de cette égalité et on trouve $a^2 = b^2 + c^2$. Le Théorème de Pythagore est démontré !

Exercice 3

cercles de Thalès. 1. Le triangle RQS est rectangle en Q, donc $\widehat{RQS} = 90°$.
QO est une hauteur, donc $\widehat{QOS} = 90°$.
c est le cercle de Thalès de $[QO]$, donc $\widehat{QUO} = \widehat{QIO} = 90°$.
Le quadrilatère $QUOI$ a trois angles rectangles, c'est donc un rectangle.

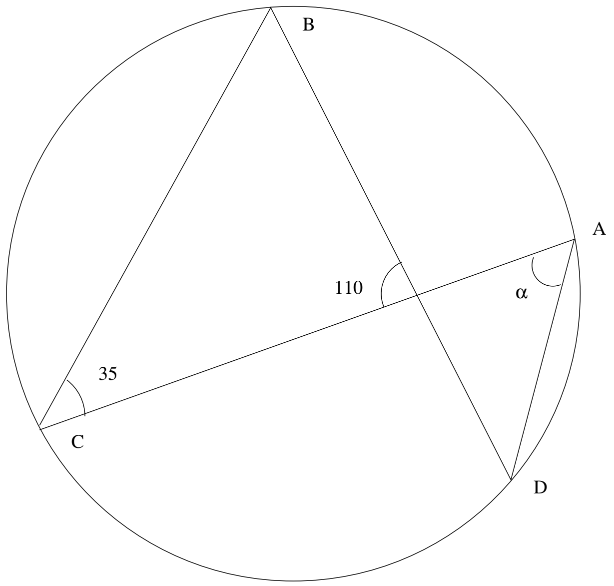
2. Les points P, B et Q sont alignés.

Les angles $\widehat{PBA}$ et $\widehat{QBA}$ sont droits, car B se trouve sur le cercle de Thalès de $[PA]$ et $[QA]$. Donc $\widehat{PBQ} = \widehat{PBA} + \widehat{QBA} = 90 + 90 = 180°$.

Exercice 4

Exercice 141 :

a) $\alpha = 35°$ car les sommets A et B sont du même côté de la corde CD, donc $\alpha = \widehat{CBD} = 180 - 35 - 110 = 35°$ par le théorème de l'arc capable.



b) $\alpha = 180 - 70 = 110$ car l'angle α et l'angle de 70° sont de deux côtés différents d'une corde.

c) Considérons un point A sur le cercle du même côté que l'angle de 65°, tel que la droite AC contienne le point O.

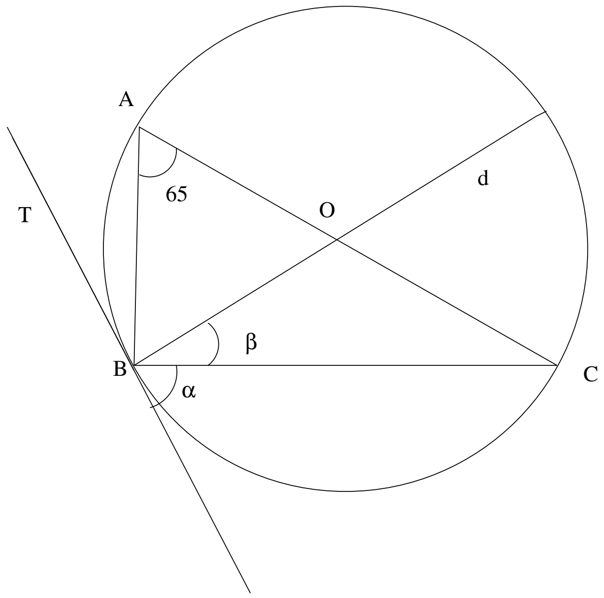
Alors l'angle $\widehat{A}$ mesure 65° par le théorème de l'arc capable et ABC est un triangle rectangle en B, car son cercle circonscrit est le cercle de Thalès du segment $[AC]$.

Traçons la droite d perpendiculaire à T passant par B. Comme T est la tangente, alors O appartient à d.

Comme $[OB]$ et $[OC]$ sont des rayons du cercle, le triangle OBC est isocèle en O.

Donc $\beta = \widehat{ACB} = 90° - 65° = 25°$.

Comme T est tangent au cercle, alors $\alpha + \beta = 90°$, donc $\alpha = 65°$.



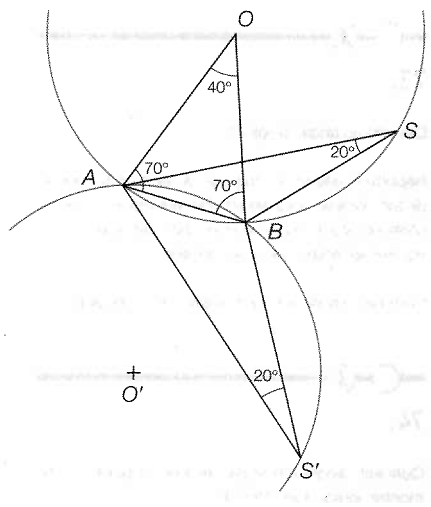
d) L'angle en bas à gauche mesure $180 - 35 - 90 = 55°$. Donc $\alpha = 180 - 90 - 55 = 35°$.

Exercice 142 :
Notons o le centre du cercle. Alors $\widehat{aod} = 5 \cdot 30 = 150°$.
Comme oad est un triangle isocèle en o, on a $\widehat{oad} = 15°$.
De plus oab est un triangle isocèle en o, et comme le cercle C est partagé en 12 parties isométriques, alors $\widehat{aob} = 3 \cdot \frac{360}{12} = 90°$, donc $\widehat{oab} = 45°$.
Ainsi on trouve $\widehat{eab} = \widehat{oab} - \widehat{oad} = 45 - 15 = 30°$.
Par la même méthode : $\widehat{obc} = 15°$ donc $\widehat{eba} = 45 + 15 = 60°$.
Ainsi $\widehat{aeb} = \widehat{ced} = 90°$. Ici, on peut voir que la longueur de la corde $[ab]$ est égale à celle de la corde $[cd]$, et comme e est le point d'intersection des segments $[ad]$ et $[bc]$, alors on peut appliquer le même raisonnement pour trouver $\widehat{ecd} = 30°$ et $\widehat{edc} = 60°$. L'angle $\widehat{abe}$ étant inscrit dans le même cercle et interceptant le même arc que l'angle $\widehat{edc}$, il a la même mesure.

Exercice 143 :
L'angle $\widehat{aoe}$ mesure 120°, donc $\widehat{oae} = 30° = \widehat{oab}$. Comme $\widehat{aoc} = 90°$, alors $\widehat{oba} = 60°$. De plus, $\widehat{dbc} = \widehat{oba} = 60°$.
Calculons $\widehat{bcd} = \widehat{ocd}$: on a $\widehat{cof} = 120°$, donc $\widehat{ocd} = 30°$. Donc $\widehat{bdc} = 90° = \widehat{edf}$.
Pour le triangle ofe : $\widehat{foe} = 90°$, donc $\widehat{ofe} = 45°$. Comme $\widehat{ofc} = \widehat{ocd}$, alors $\widehat{cfe} = \widehat{ofe} - \widehat{ocd} = 45 - 30 = 15°$. Donc $\widehat{fed} = 75°$.

Exercice 5

Double arc capable. (a) On note α la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$. Le triangle AOB étant isocèle en O, les points A et B se trouve sur un cercle c de centre O et de rayon $\overline{OA} = \overline{OB}$. De plus, l'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre de ce cercle. Tous les angles inscrits dans le cercle c interceptant le même arc $\widehat{AB}$ mesure donc, par le théorème de l'angle inscrit, $\alpha/2$.



En fait, lieu géométrique des points du plan desquels on voit le segment $[AB]$ sous un angle de $\alpha/2$ est la réunion des deux arcs capables sur $[AB]$ d'angle $\alpha/2$, par le théorème de l'arc capable. Ces deux arcs de cercles s'obtiennent pour l'un en traçant le cercle de centre O et de rayon OA, et pour le second, en traçant le cercle de centre O', le symétrique de O par la réflexion d'axe AB, et de rayon OA. Voir la figure ci-dessus pour un exemple avec $\alpha = 40°$.

(b)

1. L'angle $\widehat{ATB}$ mesure 60°, car l'angle $\widehat{ACB}$ mesure 120° et est un angle au centre.
2. Les angles $\widehat{ARB}$ et $\widehat{ASB}$ mesurent aussi 60°, et pour n'importe quel point X se trouvant sur l'arc $\widehat{AB}$ qui comprend T, alors $\widehat{AXB} = 60°$. En effet, tous ces points se trouvent du même

côté que la corde AB. L'ensemble des points X est un des **arcs capables** d'un angle de 60° construit sur $[AB]$.

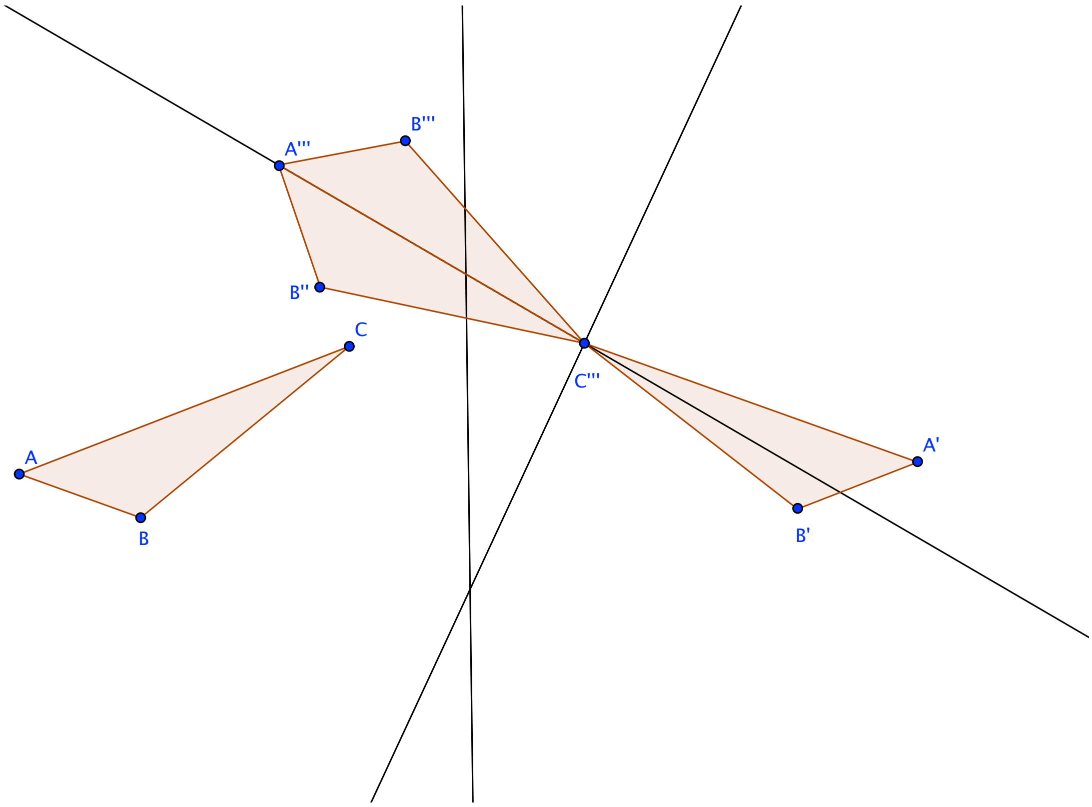
3. Sous ces points, on peut voir AB sous un angle de $180 - 60° = 120°$, par la remarque du cours qui suit le théorème de l'angle inscrit.

Exercice 6

Le segment $[IJ]$ est la diagonale du rectangle $AIMJ$. Il a donc la même longueur que l'autre diagonale $[AM]$. Comment faut-il placer M pour minimiser la longueur de $[AM]$? Il faut placer M sur la hauteur du triangle ΔABC issue de A !

Exercice 7

Test 2014 : Isométries. (25 points)



(1) Sur la figure on a construit des axes b et c de la façon suivante. Comme a est la médiatrice de $[CC''']$, le triangle obtenu par symétrie axiale d'axe a à partir du triangle ΔABC est un triangle $\Delta A'B'C'''$. On choisit par exemple pour b la médiatrice de $[A'A''']$ de sorte que l'image du triangle $\Delta A'B'C'''$ par la symétrie d'axe b soit un triangle $\Delta A'''B''C'''$. On pourrait s'arrêter ici si $B'' = B'''$. Ce n'est pas le cas et il faut encore choisir pour c la médiatrice du segment $[B''B''']$.

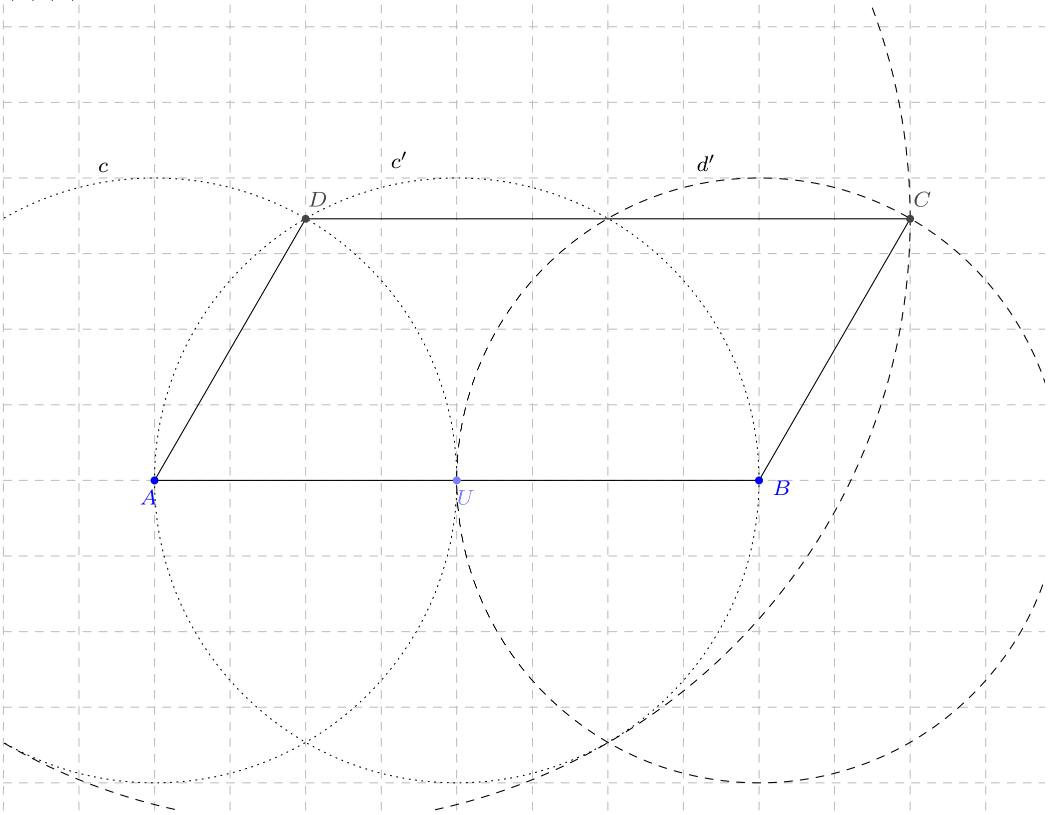
(2) L'isométrie f renverse l'orientation car c'est une composition d'un nombre impair de symétries axiales. Chacune de ces symétries axiales renverse l'orientation.

(3) Une composition de trois symétries axiales est soit une symétrie axiale, soit un renversement sans point fixe. Nous avons construit des axes a, b et c qui n'ont aucun point en commun, qui ne sont ni parallèles ni confondus, et tels que $f = S_c \circ S_b \circ S_a$. Un résultat du cours garantit

que f est un renversement sans point fixe. Si les trois axes avaient un point d'intersection commun, ce serait une symétrie axiale.

Exercice 8

Construction. (Test 2014 : 25 points)
(1)(2)



Marche à suivre.

1. Tracer un segment $[AU]$ de longueur 4 cm, puis le doubler pour obtenir un segment $[AB]$ de longueur 8 cm.
2. Tracer le cercle c de centre A et de rayon 4 cm, puis le cercle c' de centre U et de même rayon.
3. Choisir D l'un des points d'intersection des deux cercles c et c'.
4. Tracer le cercle d de centre D et de rayon 8 cm et le cercle d' de centre B et de rayon 4 cm.
5. Le point d'intersection
6. Le quadrilatère $ABCD$ est le parallélogramme cherché.

(3) L'angle en A angle mesure 60° par construction et l'angle opposé aussi (par symétrie) et les deux autres angles mesurent 120°, car ils sont isométriques et la somme des angles de ce parallélogramme vaut 360°.

Exercice 9

Vrai ou Faux ?

1. La somme des angles d'un rhomboïde vaut 360°. Vrai. Un rhomboïde est un quadrilatère simple-Il n'est pas forcément convexe, mais la diagonale qui forme son axe de symétrie le partage en deux triangles.
2. Une isométrie qui est la composition de trois symétries axiales renverse l'orientation. C'est vrai. Chaque symétrie axiale renverse l'orientation.

3. Une isométrie qui est la composition de trois symétries axiales n'a pas de point fixe. C'est faux, même s'il existe des renversements sans point fixe, la composition de trois symétries axiales peut aussi donner une symétrie, par exemple $S_a \circ S_a \circ S_a = S_a$.
4. Une isométrie qui est la composition de deux symétries axiales a toujours un point fixe. C'est faux, les translations n'ont aucun point fixe.
5. Dans un triangle une médiane passe toujours par l'un des sommets. C'est vrai. C'est la médiatrice qui ne passe pas en général par le sommet opposé.
6. Deux triangles rectangles ayant leur hypoténuses isométriques sont isométriques. C'est faux. Il existe une infinité de triangles rectangles ayant une hypoténuse donnée. Les sommets possibles se trouvent sur le cercle de Thalès !
7. Deux triangles rectangles ayant leurs cathètes isométriques deux à deux sont isométriques. C'est vrai. Le deuxième cas d'isométrie des triangles permet de conclure.
8. Un trapèze a toujours soit un centre de symétrie, soit un axe de symétrie. C'est faux. S'il a un centre de symétrie, c'est un parallélogramme. S'il a un axe de symétrie c'est un trapèze isocèle ou un losange.
9. Un trapèze ayant à la fois un centre de symétrie et un axe de symétrie est un rectangle. C'est faux. Un losange n'est pas un rectangle.
10. Un carré est un parallélogramme. C'est vrai par définition.
11. Il existe des triangles équilatéraux rectangles. C'est faux, les angles d'un triangle équilatéral mesurent tous 60°.
12. L'orthocentre d'un triangle est le point d'intersection des trois médianes. C'est faux. c'est le point d'intersection des hauteurs. Celui des médianes s'appelle centre de gravité ou barycentre.
13. Dans un triangle un segment moyen mesure les deux-tiers du côté correspondant. C'est faux. Il mesure la moitié. C'est le barycentre qui se trouve aux tiers de chaque médiane.
14. Tout cerf-volant est inscrit dans un cercle. C'est faux. Seuls les cerf-volants ayant un angle droit sont inscriptibles !
15. Pour tout cercle il existe un cerf-volant inscrit dans ce cercle. C'est vrai. On peut par exemple choisir un carré (ou un cerf-volant ayant un angle droit).
16. Tout cerf-volant inscrit dans un cercle est un rectangle. C'est faux, voir ci-dessus.
17. C'est vrai, le point d'intersection des médiatrices se trouve à égale distances des trois sommets.
18. C'est faux, il mesure le double.
19. C'est faux, ce serait vrai si deux sommets se trouve un même diamètre (cercle de Thalès).
20. C'est vrai, c'est la région comprise entre deux doubles arcs capables, d'angles respectivement 45 et 90 degres.