Cours Euler: Corrigé 31

le 17 mai 2023

Exercice 1

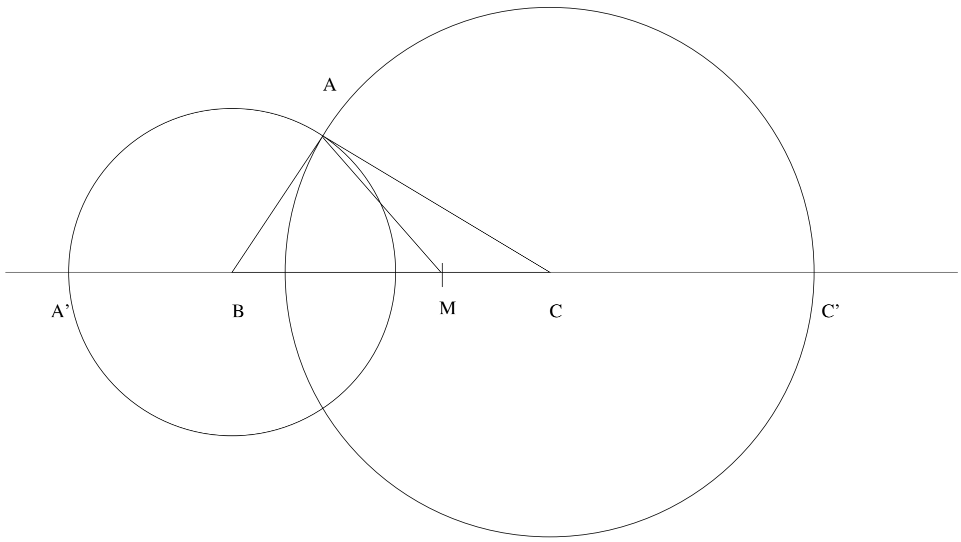
La comparaison des périmètres des triangles ABM et AMC fait apparaître que le côté $[AM]$, commun à ces deux triangles, n'a aucune influence. Dès lors la condition à respecter est

$$\overline{AB} + \overline{BM} = \overline{MC} + \overline{CA}$$

Le point M doit donc se situer au milieu d'un segment de longueur

$$\overline{AB} + \overline{BM} + \overline{MC} + \overline{CA}.$$

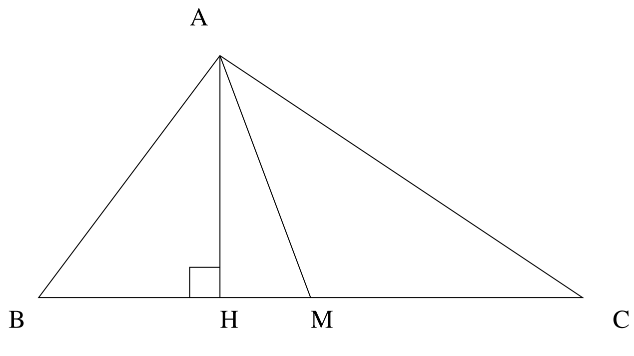
On trace donc le cercle de centre B de rayon $\overline{BA}$. On nomme A' l'intersection de ce cercle avec BC, de sorte que B se situe entre A' et C.
De même on trace le cercle de centre C et de rayon $\overline{CA}$. On nomme C' l'intersection de ce cercle avec BC, de sorte que C se situe entre B et C'. Alors M est le milieu du segment $[A'C']$.



Dans le cas des aires, le point M doit être le milieu du segment $[BC]$. En effet, considérons une hauteur AH issue de A, qui coupe BC en H. Alors

$$\text{Aire}ABM = \frac{1}{2}\overline{AH} \cdot \overline{BM} = \text{Aire}AMC = \frac{1}{2}\overline{AH} \cdot \overline{MC}$$

Donc pour que les deux aires soient égales, il faut que $\overline{BM} = \overline{MC}$, ie M est le milieu de $[BC]$.



Exercice 2

(a) La somme des angles du triangle ABC mesure 180°, donc

$$\frac{\omega}{2} + \widehat{CAB} + \widehat{ABC} = 180° \quad \text{et} \quad \beta + \widehat{DAB} + \widehat{ABD} = 180°$$

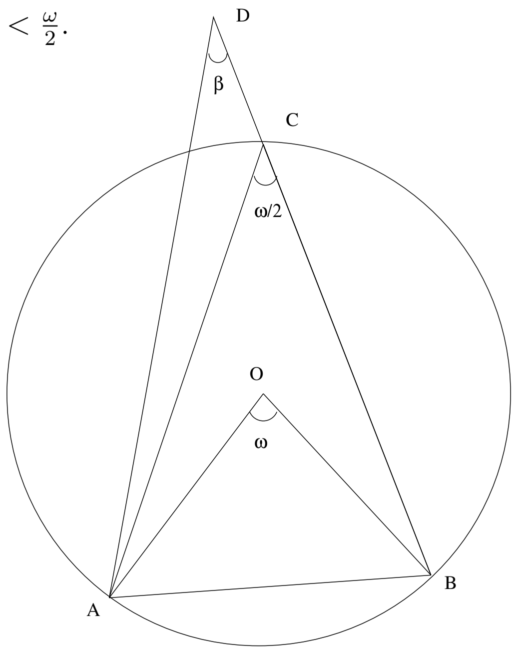
Comme $\widehat{ABC} = \widehat{ABD}$, alors

$$180 = \beta + \widehat{DAB} + \widehat{ABD} = \frac{\omega}{2} + \widehat{CAB} + \widehat{ABD}$$

donc

$$\beta + \widehat{DAB} = \frac{\omega}{2} + \widehat{CAB}$$

Comme $\widehat{DAB} > \widehat{CAB}$, alors $\beta < \frac{\omega}{2}$.



(b) La somme des angles du triangle ABC mesure 180°, donc

$$\frac{\omega}{2} + \widehat{CAB} + \widehat{ABC} = 180° \quad \text{et} \quad \beta + \widehat{DAB} + \widehat{ABD} = 180°$$

Comme $\widehat{ABC} = \widehat{ABD}$, alors

$$180 = \beta + \widehat{DAB} + \widehat{ABD} = \frac{\omega}{2} + \widehat{CAB} + \widehat{ABD}$$

donc

$$\beta + \widehat{DAB} = \frac{\omega}{2} + \widehat{CAB}$$

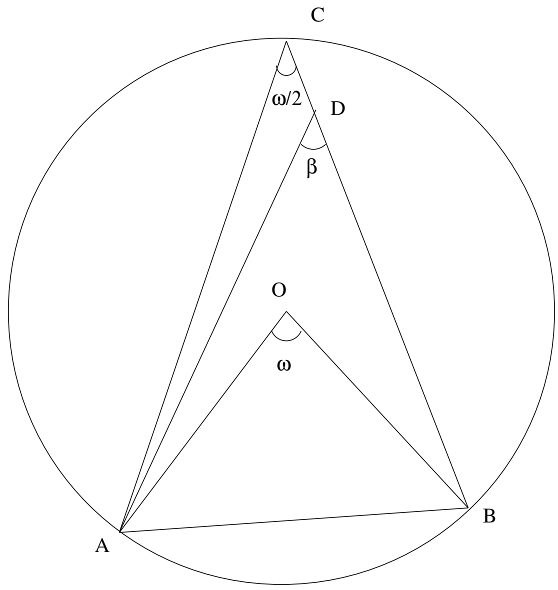
Comme $\widehat{BAC} < \widehat{BAD}$, alors $\beta > \frac{\omega}{2}$. L'illustration se trouve sur la page suivante.

(c) Soit un point X qui n'est pas sur l'arc capable du segment AB. Soit un point Y sur l'arc capable du même côté que X par rapport au segment AB. Il y a donc deux cas possibles :

— X est à l'extérieur de l'arc contenant Y. Dans ce cas, l'angle $\widehat{AXB} < \widehat{AYB}$.

— X est à l'intérieur de l'arc contenant Y. Dans ce cas, l'angle $\widehat{AXB} > \widehat{AYB}$.

Dans les deux cas, $\widehat{AXB} \neq \widehat{AYB}$. Donc il n'y a pas d'autre point vérifiant la condition du lieu géométrique.



Exercice 3

Soit x le nombre de carrés disposés horizontalement et y le nombre de carrés disposés verticalement. Le nombre total de carrés sur le tapis vaut donc xy. Si chaque carré est d'aire 1, l'aire du tapis vaut donc xy.
Il y a x carrés sur chaque bord horizontal et y carrés sur chaque bord vertical. Pour ne pas compter deux fois chaque carré des coins il faut soustraire 4 à $2x+2y$. Le nombre de carrés touchant le bord vaut ainsi $2x+2y-4$.
Le nombre de carrés intérieurs vaut $xy-(2x+2y-4)=xy-2x-2y+4$. Pour que ce nombre soit égal à $2x+2y-4$, il faut que

$$xy = 4x+4y-8 \;\Leftrightarrow\; xy-4y = 4x-8 \Leftrightarrow y(x-4) = 4(x-2)$$

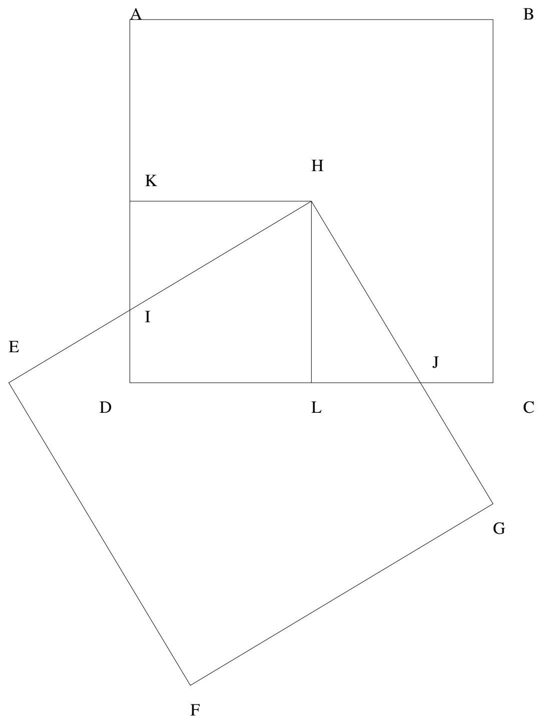
On peut donc aussi exprimer y en fonction de x :

$$y = \frac{4(x-2)}{x-4}$$

Nous cherchons les valeurs entières de x et y qui vérifient cette relation. Autrement dit, nous cherchons les points du graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{4(x-2)}{x-4}$ dont les corrdonnées sont entières. Nous n'avons pas appris à résoudre ce problème, mais pouvons chercher en essayant. Une bonne idée à avoir est de choisir $x=5$ de sorte que le dénominateur $x-4$ soit égal à 1. Alors $y=12$.
On peut donc choisir un tapis de 5 sur 12. On peut aussi choisir un tapis de 6 sur 8.

Exercice 4

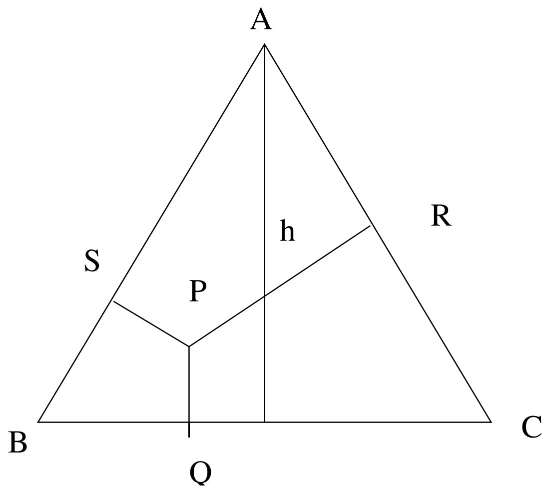
Le problème a la même solution lorsque le côté $[EH]$ est plus long ou égal à la moitié de la diagonale du carré $ABCD$. Si ce n'était pas le cas, on aurait besoin de connaître le côté de $EFGH$ et celui de $ABCD$ pour résoudre le problème.
Remarquons que les triangles HKI et HLJ sont isométriques. En effet, on est dans le premier cas d'isométrie avec $\overline{HK} = \overline{HL} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, $\measuredangle HKI = \measuredangle HLJ = 90°$ et $\measuredangle KHI = \measuredangle LHJ = 90° - \measuredangle IHL$. Donc, par les axiomes de l'aire, l'aire du quadrilatère $HIDJ$ est égale à l'aire de $HLDK$, c'est-à-dire le quart du carré $ABCD$.
La figure montre le cas où les deux carrés sont isométriques, mais le raisonnement reste valable en général, sous la condition expliquée ci-dessus.



Dans le cas où le côté du carré qui tourne vaut exactement la moitié de la diagonale du carré fixe, appelons $a = \overline{AB}$. La diagonale vaut donc, par Pythagore, $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} \cdot a$. Le carré qui tourne a donc $\frac{\sqrt{2} \cdot a}{2}$ pour côté, si bien que l'aire grisée vaut toujours $\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \cdot a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot a}{2} = \frac{a^2}{4}$.

Exercice 5

Soit P un point dans l'intérieur du triangle. Remarquons que pour que la longueur d'un fil de P vers un côté soit minimale, il faut que le fil soit tendu orthogonalement. Donc si on veut utiliser le moins de fil possible, il faut au moins que les fils soient orthogonaux aux côtés. Notons O l'intersection de la perpendiculaire à BC passant par P, S l'intersection de la perpendiculaire à AB passant par P et R l'intersection de la perpendiculaire à AC passant par P.
Ainsi, la réunion des triangles BPA, APC et BPC est ABC, et les intérieurs de ces triangles sont disjoints. Donc la somme de leurs aires est égale à l'aire de ABC, par l'axiome (ii) de l'aire.
Notons aussi a la longueur du côté du triangle ABC(ABC est équilatéral). Notons aussi h la longueur de la hauteur de ABC issue de A.



Alors

$$\text{Aire}ABC = \frac{ah}{2} = \frac{a \cdot \overline{PS}}{2} + \frac{a \cdot \overline{PO}}{2} + \frac{a \cdot \overline{PR}}{2} = a \cdot \frac{\overline{PS} + \overline{PO} + \overline{PR}}{2}$$

Ainsi $\overline{PS} + \overline{PO} + \overline{PR} = h$. Donc le point P peut être placé n'importe où, la longueur de fil utilisé sera toujours la même.

Exercice 6

1. **Cas où A' est entre B et C.** Ici
$\text{Aire}ABC \overset{(ii)}{=} \text{Aire}ABA' + \text{Aire}AA'C \overset{(\text{cas } 1)}{=} \frac{1}{2}\overline{AA'} \cdot \overline{BA'} + \frac{1}{2}\overline{AA'} \cdot \overline{A'C}$.
$= \frac{1}{2}\overline{AA'} \cdot (\overline{BA'} + \overline{A'C}) = \frac{1}{2}\overline{AA'} \cdot \overline{BC}$, par l'axiome (D.4).

Cas où A' est sur le prolongement de $[BC]$. On traite le cas où A' n'est pas sur $[BC$, l'autre cas se traitant de manière similaire. Utilisant à nouveau l'axiome (D.4), on a :

$$\begin{aligned}
\text{Aire}AA'C &= \frac{1}{2}\overline{AA'} \cdot \overline{A'C} \\
&= \frac{1}{2}\overline{AA'} \cdot (\overline{A'B} + \overline{BC}) \\
&= \frac{1}{2}\overline{AA'} \cdot \overline{A'B} + \frac{1}{2}\overline{AA'} \cdot \overline{BC} \\
&= \text{Aire}AA'B + \frac{1}{2}\overline{AA'} \cdot \overline{BC}
\end{aligned}$$

Mais $\text{Aire}AA'C = \text{Aire}AA'B + \text{Aire}ABC$ par l'axiome (ii) de l'aire.

2. On applique simplement la formule "1/2 $\times$ base $\times$ hauteur". L'aire du premier triangle vaut $0{,}5 \cdot 3{,}1 \cdot 2{,}8 = 4{,}34$. Celle du deuxième $5 \cdot 2{,}4/2 = 6$ et celle du troisième $1/2 \cdot 2{,}7 \cdot 3{,}7 = 4{,}995$.

3. Ils ont tous la même aire. En effet, traçons la hauteur de ACB issue de A. Elle coupe BC en un point H. Alors

$$\text{Aire}ABC = \frac{1}{2}\overline{AH} \cdot \overline{BC}$$

De même traçons la hauteur de EBC issue de E. Elle coupe BC en un point I. Alors

$$\text{Aire}EBC = \frac{1}{2}\overline{EI} \cdot \overline{BC}$$

Et pour finir traçons la hauteur de DBC issue de D. Elle coupe BC en un point J. Alors

$$\text{Aire}DBC = \frac{1}{2}\overline{DJ} \cdot \overline{BC}$$

Remarquons que comme $BC//AE$ et comme D est un point de la droite AE, alors $\overline{AH}$, $\overline{EI}$ et $\overline{DJ}$ sont tous les trois la distance de $\overline{BC}$ à $\overline{AE}$, donc elles sont égales. Ainsi les aires des trois triangles sont égales.

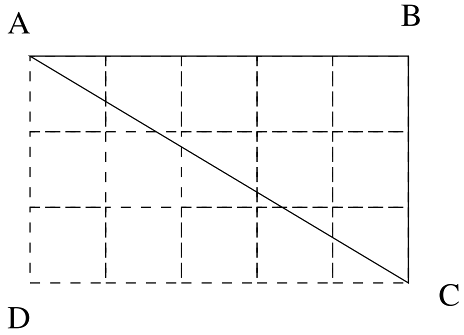
Exercice 7

Les polygones qui ont même aire sont :

- les parallélogrammes *ABCD* et *BCEF*, car ils ont la même base et la même hauteur ;
- les triangles *ABF* et *CDE*, car :
  - *AD* = *FE* donc *AF* = *DE* ;
  - les hauteurs issues de *B* et de *C* sont isométriques ;
- les trapèzes *ABGD* et *CEFG*, car :
  - l'aire de *ABGD* résulte de la différence des aires de *ABCD* et *BCG* ;
  - l'aire de *CEFG* résulte de la différence des aires de *BCEF* et *BCG*.

Exercice 8

a) J'utiliserai l'astuce suivante ici :



On voit que l'aire du triangle ABC est la moitié que celle du rectangle $ABCD$. Comme l'aire de $ABCD$ vaut 15 unités, alors celle de ABC vaut 7.5 unités (cela découle aussi de la formule pour l'aire du triangle).

	fig. 1	fig.2	fig.3
Aire (en unités)	6	8	12

b) Ici l'aire d'un carré vaut deux unités. Donc on calcule comme avant l'aire des figures en prenant le carré comme unité, puis on multiplie par 2 pour obtenir l'aire dont l'unité est le triangle.

	fig. 4	fig. 5	fig. 6
Aire (en unités)	24	12	8

c) Les figures 1 et 5 ont la même aire, car si l'unité est le carré, ils ont tous les deux une aire de 6 unités. Les figures 3 et 4 aussi ont la même aire (celle de 12 carrés).

Exercice 9

Construction. On constate que les abscisses de B et C sont égales. Donc la droite BC est verticale (ie parallèle à l'axe y). Donc la hauteur issue de A est horizontale. Ainsi l'aire du triangle ABC vaut

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{(4-(-2)) \cdot |5-x|}{2} = 3|5-x|$$

où $|z|$ dénote la valeur absolue de $z \in \mathbb{R}$, ie si z est positif, alors $|z| = z$ et si z est négatif, alors $|z| = -z$. Ainsi, $|z|$ est toujours positif.
Le terme $4-(-2)$ dans l'équation est la longueur de la hauteur issue de A, et $|5-x|$ est la distance entre B et C.

a)

$$\text{Aire}(ABC) = 24 = 3|5-x|$$

donc $|5-x| = 8$ et donc $x = -3$ où $x = 13$.

b)

$$\text{Aire}(ABC) = 48 = 3|5-x|$$

donc $|5-x| = 16$ et donc $x = -11$ où $x = 21$.

c) La distance entre deux points $X(x, y)$ et $X'(x', y')$ est donnée par

$$d(X, X') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

donc

$$24 = \text{Périmètre}(ABC) = \underbrace{|5-x|}_{\text{distance entre } C \text{ et } B} + \underbrace{\sqrt{(4-(-2))^2+(-3-5)^2}}_{\text{distance entre } A \text{ et } B} + \underbrace{\sqrt{(-2-4)^2+(x-(-3))^2}}_{\text{distance entre } C \text{ et } A}$$
$$= |5-x| + 10 + \sqrt{x^2+6x+45}$$

Une solution de cette équation est $x = -3$.

Exercice 10

Constructions. (a)

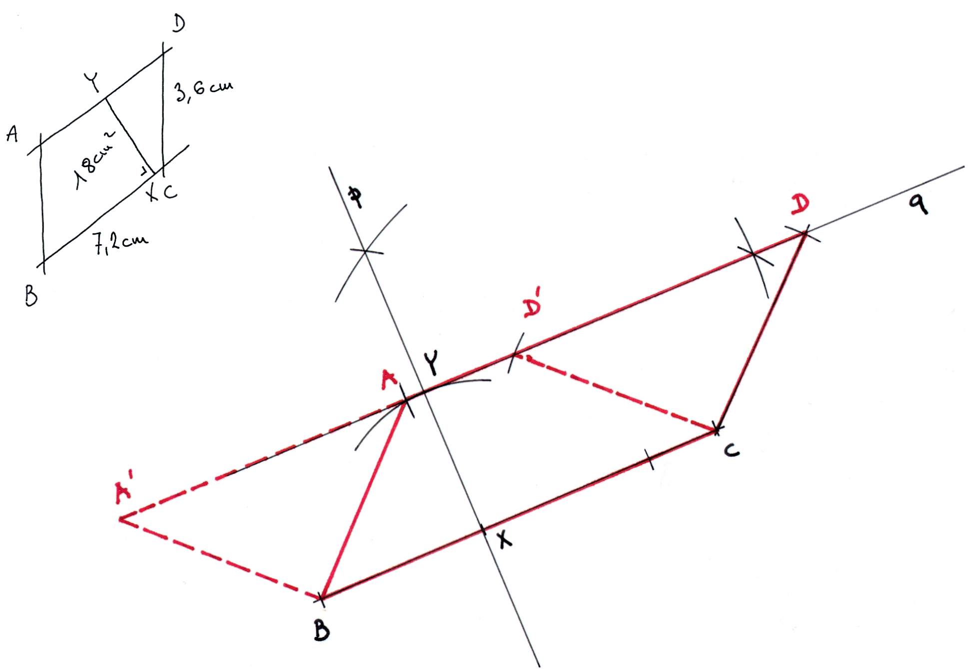
Corrigé

55. (suite)

b) Si l'aire du parallélogramme $ABCD$ mesure 18 cm^2 et le côté BC 7,2 cm, la hauteur correspondante XY = 18 : 7,2 = 2,5 cm.

- tracer BC = 7,2 cm ;
- par un point X quelconque de BC, construire une perpendiculaire p à BC ;
- arc de cercle (X ; 2,5 cm) coupe p en Y ;
- construire une parallèle q à BC par Y ;
- arc de cercle (C ; 3,6 cm) coupe q en D et D' ;
- arc de cercle (D ; 7,2 cm) coupe q en A ;
- $ABCD$ est le parallélogramme cherché.

Il existe une seconde solution identique à la première à isométrie près, déterminée par les sommets A, B et D'.



(b) Corrigé

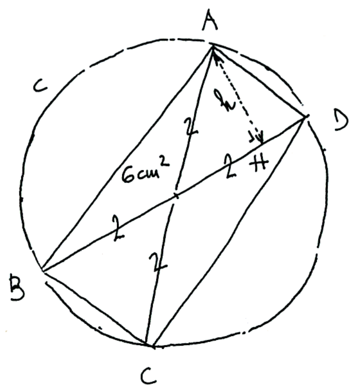
59. (suite 2)

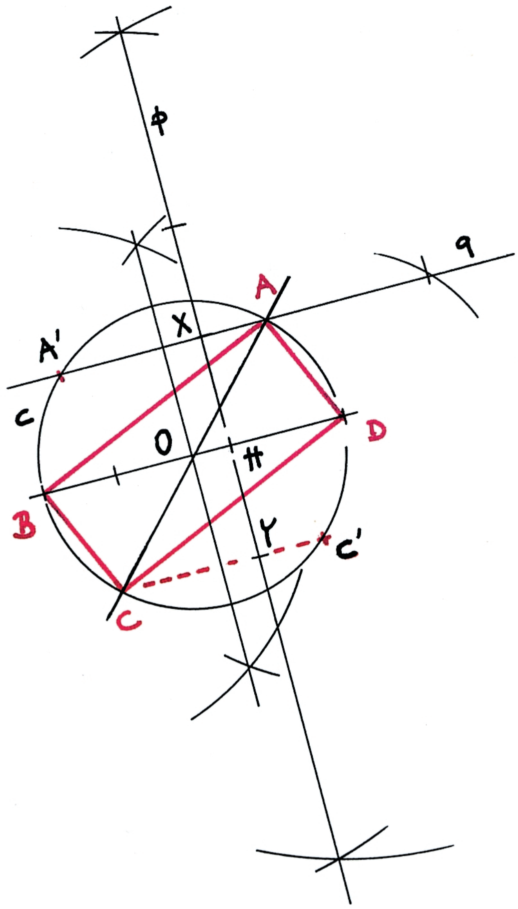
c) Si l'aire du rectangle $ABCD = 6$ cm^2, celle du triangle $ABD = 3$ cm^2.

Si $BD = 4$ cm, sa hauteur correspondante $AH = \frac{2 \cdot 3}{4} = 1{,}5$ cm.

- tracer la diagonale $BD = 4$ cm ;
- construire son point milieu O ;
- tracer le cercle c $(O\,;\,2$ cm$)$;
- placer un point H sur la diagonale BD ;
- construire une perpendiculaire p à BD qui passe par H ;
- arc de cercle $(H\,;\,1{,}5$ cm$)$ coupe p en X et Y ;
- construire une parallèle q à BD, qui passe par X ;
- q coupe c en A et A' ;
- la droite AO coupe c en le sommet C ;
- $ABCD$ est le rectangle cherché.

Il existe deux autres solutions identiques, à isométrie près, qui sont les rectangles que l'on peut obtenir en procédant de la même manière, à partir de Y et A'.





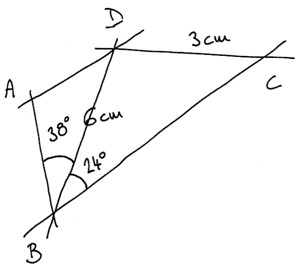
(c)

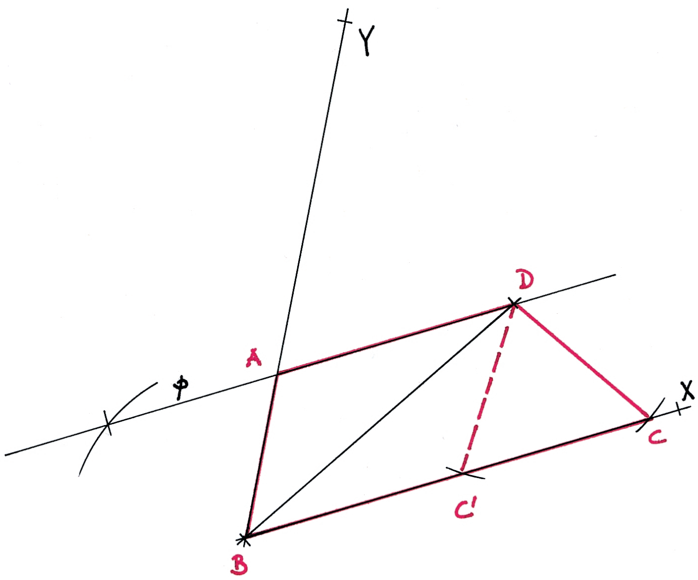
Corrigé

59. (suite 3)

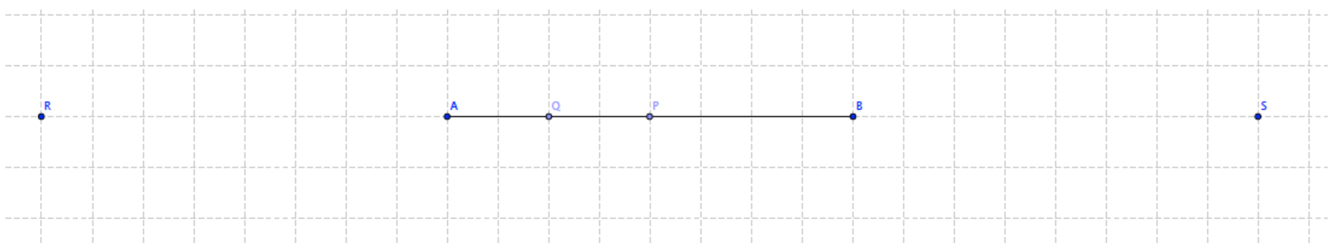
d) – tracer $BD = 6$ cm ;
- poser l'angle $\widehat{DBX} = 24°$;
- arc de cercle (D ; 3 cm) coupe AX en C et C' ;
- poser angle $\widehat{DBY} = 38°$;
- construire une parallèle p à BC par D ;
- p coupe BY en A ;
- $ABCD$ est le trapèze cherché.

Il existe une seconde solution, le trapèze $ABC'D$.





(d) Pour que $(AB, P) = -1$ il faut placer le point P à égale distance de A et B sur le segment $[AB]$. Pour que $(AB, Q) = -1/3$ il faut que le point Q se trouve à 1 cm de A et 3 de B, sur le segment à nouveau puisque le rapport de section est négatif. Les deux autres points se trouvent en dehors du segment. Le premier point est plus proche de A que de B puisque $(AB, R) = 1/2$ est plus petit que 1. Il suffit ici de placer R à 4 cm de A (et donc 8 de B). Enfin le dernier point S vérifie $(AB, S) = 2$ On le place donc à 4 cm à gauche de B et donc à 8 cm de A :



Exercice 11

L'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à la hauteur multipliée par la base : $3{,}6 \cdot 1{,}6 = 5{,}76$.
L'aire du trapèze $FGHI$ se calcule avec la formule "moyenne des hauteurs · base", c'est-à-dire $2{,}8 \cdot \frac{2+2{,}8}{2} = 2{,}8 \cdot 2{,}4 = 6{,}72$.
Enfin l'aire du losange $JKLM$ est celle d'un rhomboïde. Il suffit de calculer la moitié du produit des diagonales : $4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$.

Exercice 12

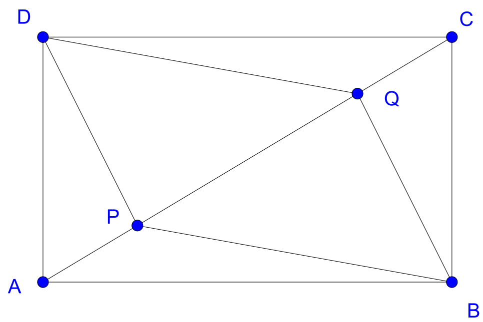
Vrai ou faux ? Justifie ton raisonnement !

1. C'est vrai. Les diagonales partagent le parallélogramme en deux paires de triangles isométriques. Deux triangles non isométriques ont un côté isométrique et une hauteur commune.

2. C'est faux puisque $7^2 + 7^2 \neq 10^2$. On conclut par le Théorème de Pythagore.

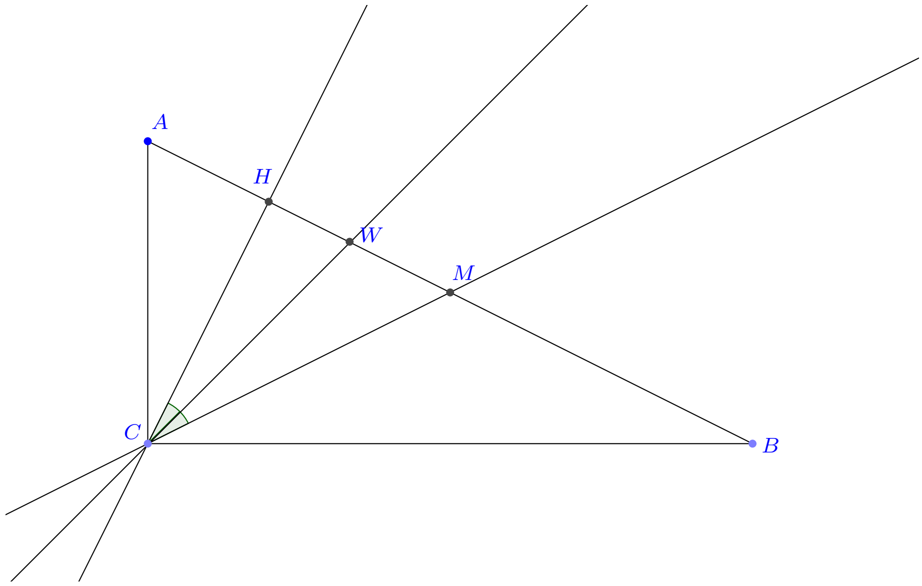
3. C'est vrai puisque $(\sqrt{8})^2 = 2^2 + 2^2$. On conclut par la réciproque du Théorème de Pythagore.

4. C'est vrai. Rappelons qu'un quadrilatère simple est un parallélogramme si et seulement si ses côtés opposés sont isométriques. Nous allons montrer les deux égalités $\overline{DP} = \overline{QB}$ et $\overline{DQ} = \overline{PB}$ grâce aux cas d'isométrie des triangles. Considérons premièrement ΔDAP et $\triangle BCQ$. Par construction $\overline{AP} = \overline{CQ}$ et $\overline{DA} = \overline{BC}$ car ce sont deux côtés opposés du rectangle. On a l'isométrie des angles $\widehat{BCQ} = \widehat{DAP}$ car ils sont alternes-internes par rapport à deux parallèles. Ainsi, par le deuxième cas d'isométrie des triangles, $\triangle DAP$ et $\triangle BCQ$ sont isométriques et donc on a l'égalité $\overline{DP} = \overline{QB}$. Par le même raisonnement, en considérant $\triangle APB$ et $\triangle CQD$, on a que $\overline{DQ} = \overline{PB}$. Ainsi le quadrilatère $BPDQ$ est un parallélogramme.



Exercice 13

Le plus important à mon avis est de bien se représenter la situation et de faire un croquis de la situation pour pouvoir raisonner sur une figure d'étude (sans se laisser tromper par la figure, c'est-à-dire sans oublier de tout justifier).



Même s'il s'agit d'un problème classé dans la catégorie 'olympique", il me semble que tout est déjà clair ! En effet, C se trouve sur le cercle de Thalès de $[AB]$, si bien que le triangle ΔCBM est isocèle en M. Ainsi les angles $\beta = \widehat{ABC}$ et $\widehat{BCM}$ sont isométriques. D'autre part les triangles ΔAHC et ΔACB sont deux triangles rectangles *semblables*, ils ont un angle droit, ils ont un angle en commun (en A) et donc les angles $\widehat{ACH}$ et β sont isométriques par le Théorème de la somme des angles d'un triangle. Or, la bissectrice CW partage l'angle en C en deux angles isométriques $\widehat{ACW}$ et $\widehat{BCW}$. Par conséquent, si l'on retranche β de chacun d'eux on conclut que $\widehat{HCW}$ et $\widehat{WCM}$ sont isométriques.