Cours Euler: Corrigé 32

le 31 mai 2023

Exercice 1

Commençons par calculer l'aire de ADP, PBC et $ABCD$:

$$\text{Aire}(ADP) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3.5 = 14 \text{ cm}^2$$
$$\text{Aire}(PBC) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2.5 = 15 \text{ cm}^2$$
$$\text{Aire}(ABCD) = 6 \cdot \left(\frac{8+12}{2}\right) = 60 \text{ cm}^2$$

Comme Q est le milieu de PC, par la partie 1 de l'exercice 5 sur les aires, les aires de DPQ et DCQ sont les mêmes. Calculons donc l'aire de DPC :

$$\text{Aire}(DPC) = \text{Aire}(ABCD) - \text{Aire}(ADP) - \text{Aire}(PBC) = 60 - 14 - 15 = 31 \text{ cm}^2$$

Donc

$$\text{Aire}(DPQ) = \text{Aire}(DCQ) = \frac{\text{Aire}(DPC)}{2} = 15.5 \text{ cm}^2$$

Donc les aires de DPC et DPQ sont les plus grandes.

Exercice 2

1. $r = 0$
2. $r = +\infty$
3. $r < 0$. Plus précisément, lorsque P se rapproche de A, r se rapproche de 0 ; et lorsque P s'éloigne de A, r devient un nombre négatif de plus en plus petit.
4. $0 \leq r < 1$. Plus précisément, lorsque P se rapproche de A, r se rapproche de 0 ; et lorsque P s'éloigne de A, r se rapproche de 1.
5. $r > 1$. Plus précisément, lorsque P se rapproche de B, r devient de plus en plus grand ; et lorsque P s'éloigne de B, r se rapproche de 1.
6. Il y a deux cas à traiter : $P \in [AB]$ et $P \notin [AB]$. Dans le premier cas, $r = 1$ si et seulement si $|PA| = -|PB|$ si et seulement si $|PA| = 0 = |PB|$ si et seulement si $P = A = B$. Or $A \neq B$ (car $[AB]$ est un segment orienté), donc $r = 1$ est impossible. Dans le second cas, $r = 1$ si et seulement si $|PA| = |PB|$ si et seulement si P est le milieu de $[AB]$. Or ici, $P \notin [AB]$, donc $r = 1$ est impossible.

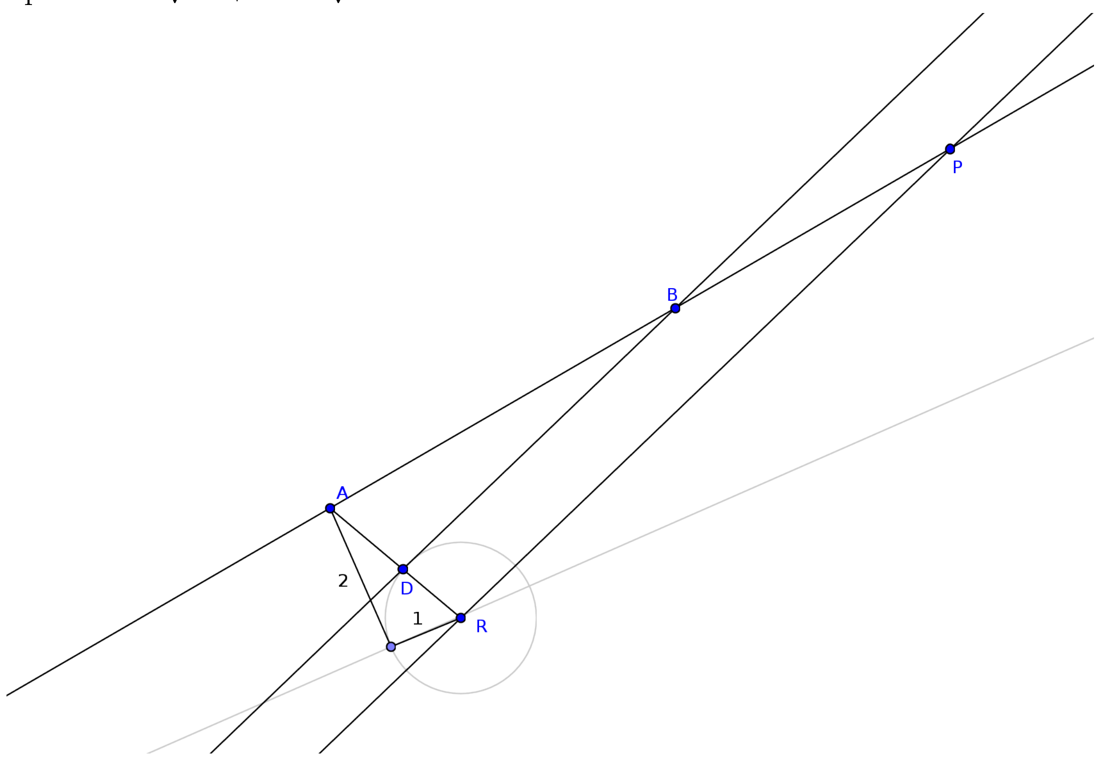
Exercice 3

1. $r(AC,E) = \dfrac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = \dfrac{3\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB}}{\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB}} = \dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{7}{3}.$
2. $r(BE,A) = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{AB}}{3\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB}} = \dfrac{1}{\frac{7}{2}} = \dfrac{2}{7}.$
3. $r(BF,C) = -\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CF}} = -\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{AB}} = -\dfrac{2}{5}.$
4. $r(FD,B) = \dfrac{\overline{BF}}{\overline{BD}} = \dfrac{3\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB}}{2\overline{AB}} = \dfrac{7}{4}.$
5. $r(AD,A) = \dfrac{\overline{AA}}{\overline{AD}} = \dfrac{0}{\overline{AD}} = 0.$
6. $r(AE,D) = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DE}} = -\dfrac{3\overline{AB}}{\frac{1}{2}\overline{AB}} = -6.$
7. $r(DA,C) = -\dfrac{\overline{CD}}{\overline{CD}} = -\dfrac{\overline{AB}}{2\overline{AB}} = -\dfrac{1}{2}.$

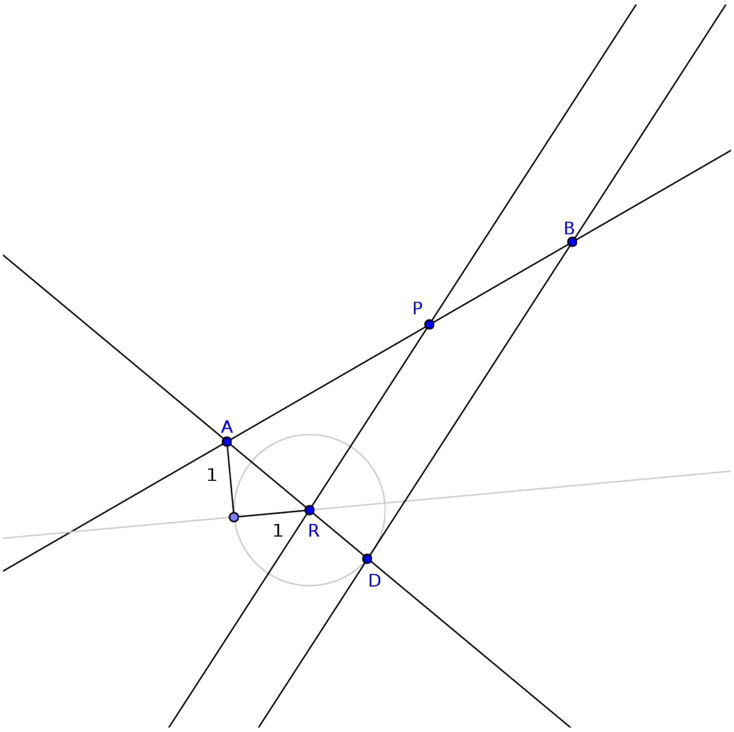
Exercice 4

Voici les constructions des rapports de section cherchés sur un segment $[AB]$ donné en utilisant la méthode vue au cours. Nous ne vous en demandions pas tant ici et il suffisait de construire les segments $[AR]$, qui ont la longueur $|r|$ voulue par le Théorème de Pythagore, et le point D.

1. Notons que $\overline{AR} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

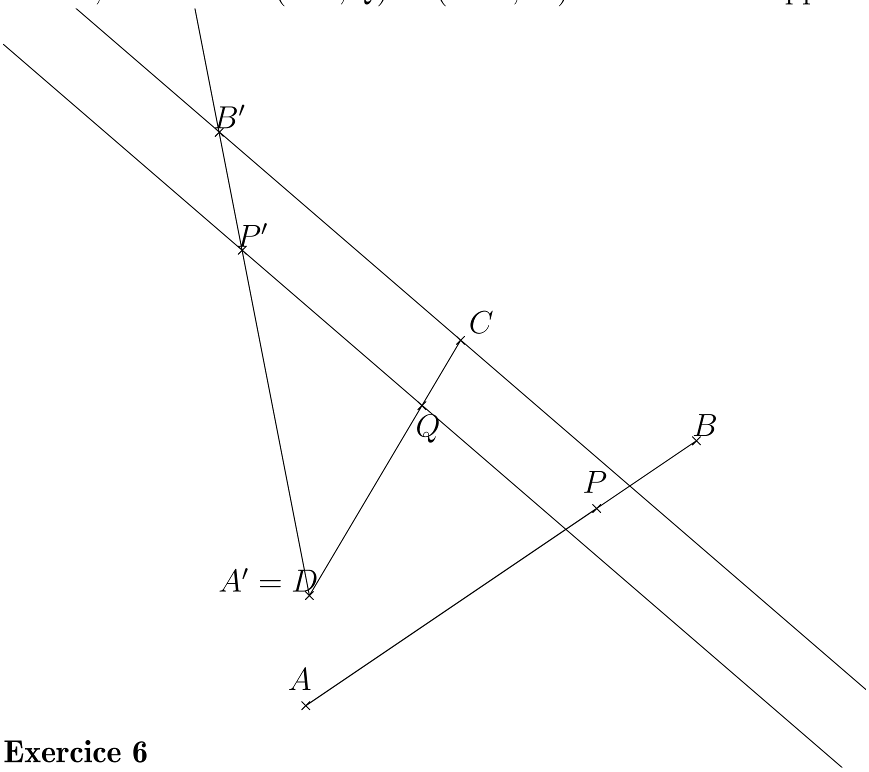


2. Notons que $\overline{AR} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.



Exercice 5

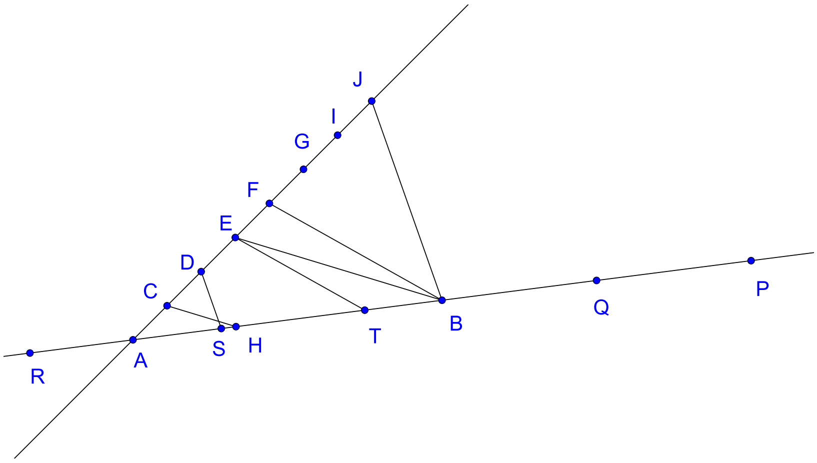
Tracer une demi-droite Da telle que l'angle aDC soit ni nul ni plat. Reporter sur la demi-droite Da les distances $\overline{AP}$ et $\overline{AB}$ pour obtenir respectivement les points P' et B'. Construire la parallèle à la droite $B'C$ passant par P'. Elle coupe la droite DC en Q. Notons $A' = D$. La section $(A'B', P)$ est isomorphe à la section (AB, P) et donc elles ont le même rapport. De plus, par le théorème de Thalès, les sections (CD, Q) et $(A'B', P')$ ont le même rapport.



Exercice 6

Voici les points P, Q, R, S et T obtenus par la construction.

Marche à suivre pour R**.** Traçons une demi-droite $[Aa$ d'extrémité A déterminant un angle ni nul ni plat avec la demi-droite $[AB$. Plaçons un point $C \neq A$ sur cette demi-droite et reportons la distance $\overline{AC}$ depuis C pour obtenir D, puis cette distance sur Da pour obtenir E et ainsi de suite jusqu'à J.



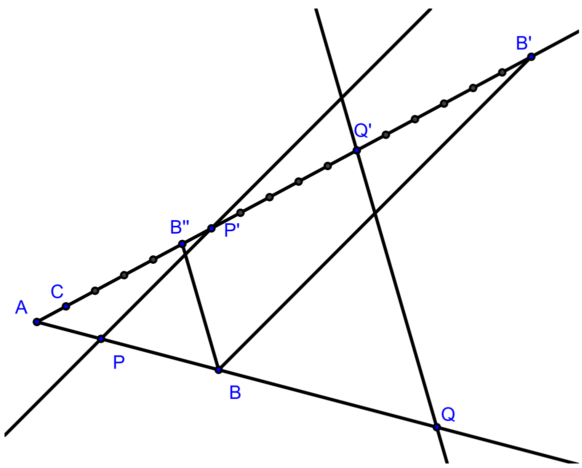
Traçons la droite EB et construisons la parallèle à cette droite passant par C. Soit H l'intersection de cette parallèle avec AB. Reportons la distance $\overline{AH}$ sur la demi-droite d'extrémité A et support AB qui ne contient pas B. On obtient le point R recherché.

En effet, par le théorème de Thalès $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{AC}}{3\overline{AC}} = \dfrac{1}{3}$. Ainsi, $(AB, R) = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 7

Tracer la demi-droite $[AB$ puis une demi-droite $[AC$ de sorte que l'angle BAC ne soit ni nul ni plat. Reporter seize fois la longeur $\overline{AC}$ sur la demi droite $[AC$. Nommer B' le dix-septième point sur la demi-droite $[AC$ et P' le sixième, si bien que $\dfrac{\overline{P'A}}{\overline{P'B'}} = \dfrac{6}{11}$. Alors, en construisant la parallèle à $[BB']$ par P', on obtient, par le théorème de Thalès, $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{6}{11}$ et donc $(AB, P) = -\dfrac{6}{11}$.

Nommer B'' le cinquième point sur la demi-droite $[AC$ et Q' le onzième, si bien que $\dfrac{\overline{Q'A}}{\overline{Q'B''}} = \dfrac{11}{6}$. Alors, en construisant la parallèle à $[BB'']$ par Q', on obtient, par le théorème de Thalès, $(AB, Q) = \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \dfrac{11}{6}$.



Exercice 8

En considérant l'angle en A commun au triangle ΔABC et au triangle $\Delta AB'C'$, on sait, par la proposition du cours sur le rapport des aires de deux triangles ayant un angle isométrique, que

$$\frac{\sigma(\Delta ABC)}{\sigma(\Delta AB'C')} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB'} \cdot \overline{AC'}}.$$

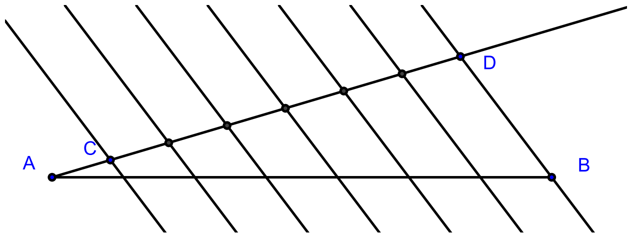
De même, l'angle en B du triangle ΔABC et celui en B' du triangle $\Delta AB'C'$ sont correspondants donc égaux. Par conséquent, nous savons par la même proposition que

$$\frac{\sigma(\Delta ABC)}{\sigma(\Delta AB'C')} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB'} \cdot \overline{B'C'}}.$$

La comparaison des deux rapports montre que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$. On conclut que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$.

Exercice 9

Soit $[AB]$ le segment que l'on veut diviser en sept parties isométriques. Tracer une demi-droite $[AC$ avec C de sorte que l'angle BAC ne soit ni nul ni plat. Reporter six fois la distance $\overline{AC}$ sur la demi-droite, jusqu'au point D de sorte que le segment $[AD]$ est partagé en sept parties égales. Puis construire successivement les parallèles à la droite BD passant par tous les points construits précédemment sur la demi droite $[AC$. Les intersections de ces parallèles avec le segment $[AB]$ nous donnent les points pour partager le segment $[AB]$ en 7 parties égales (Remarquons que cette construction est valable grâce au théorème de Thalès).



Exercice 10

Théorème de Thalès généralisé. Soit D l'intersection de la droite BB' avec le segment $[AC']$. Par le théorème de Thalès appliqué au triangle CAC' et aux parallèles BB' et CC', on a $(AB, C) = (AD, C')$. Par le même théorème appliqué au triangle $AC'A'$ et aux parallèles AA' et BB', on a $(AD, C') = (A'B', C')$. Ainsi, en mettant ensemble ces deux égalités, on obtient $(AB, C) = (A'B', C')$.

Exercice 11

Notons O le centre de la Terre, M le point où la corde est plantée à Marin et Y le point où la corde est plantée à Yverdon. Notons aussi I le milieu de la corde, et J l'intersection de la droite IO avec la surface du lac. Ainsi $\overline{IJ}$ est la profondeur du milieu de la corde. Rappelons que par une proposition du cours sur les intersections de cercles et de droites, le diamètre IO, puisqu'il passe par le milieu I de la corde $[MY]$, est perpendiculaire à la droite MY. Le triangle MIO est donc rectangle en I.
Le rayon de la Terre est 6400 km.
Par le théorème de Pythagore :

$$6400^2 = \overline{MO}^2 = \overline{IO}^2 + \overline{IM}^2 = \overline{IO}^2 + (\frac{38}{2})^2$$

Ainsi

$$\overline{IO} = \sqrt{6400^2 - 19^2} = 6399.9717977 \text{ km}$$

Donc

$$\overline{IJ} = \overline{JO} - \overline{IO} = 6400 - 6399.9717977 \approx 28 \text{ m}$$