EPFL - Printemps 2023	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 4	20 mars 2023

Les exercices indiqués par une étoile $\star$ sont optionnels.

Exercice 1.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'idéal proposé est premier ou maximal.

(a) $(0) \subset \mathbb{Z}$.

(b) $(t) \subset \mathbb{Z}[t]$.

(c) $(t) \subset \mathbb{R}[t]$.

(d) $(101) \subset \mathbb{Z}[t]$.

(e) $(42) \subset \mathbb{Z}[t]$.

(f) $(t^2 - 2) \subset \mathbb{Z}[t]$.

(g) $(t^2 - 2) \subset \mathbb{R}[t]$.

(h) $(t + 5, 10) \subset \mathbb{Z}[t]$.

(i) $(t + 5, 11) \subset \mathbb{Z}[t]$.

(j) $(t^2 + 1, 2) \subset \mathbb{Z}[t]$.

Indication : Pour prouver qu'un idéal bilatère $I \subset A$ est premier, il suffit de montrer que le quotient A/I est intègre.

Exercice 2. 1. Discuter les systèmes suivants : $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 7 \pmod{12} \end{cases}$ et $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 8 \pmod{12} \end{cases}$

2. Montrer que $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Exercice 3. 1. Soit $f\colon A \twoheadrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux surjectif tel que $\ker f = (a_1, \dots, a_m)$ pour certains $a_1 \dots, a_m \in A$. Soit aussi $I = (b_1, \dots, b_n) \subseteq B$ un idéal à gauche. Si $c_1, \dots, c_n \in A$ sont tels que $f(c_i) = b_i$ pour chaque i, montrez que $f^{-1}(I) = (a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_n)$.

2. Soit k un corps, $a, b \in k$ et considérons les homomorphismes d'anneaux k-linéaires

$$\mathrm{ev}_b\colon k[x,y] \to k[x],\ x \mapsto x,\ y \mapsto b \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ev}_a\colon k[x] \to k,\ x \mapsto a$$

et

$$\xi := \mathrm{ev}_a \circ \mathrm{ev}_b\colon k[x,y] \longrightarrow k.$$

Montrez que $\ker \xi = (x - a, y - b)$ et que $\ker \xi$ est un idéal maximal de $k[x,y]$.
On peut en fait montrer que si k est algébriquement clos, alors tous les idéaux maximaux de $k[x,y]$ sont de cette forme. C'est une conséquence du Nullstellensatz d'Hilbert.

Exercice 4.
Dans cet exercice, nous étudions les anneaux $\mathbb{Z}[i]/(p)$ pour p un nombre premier. Nous écrirons $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Montrez que $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{F}_p[t]/(t^2 + 1)$.
Indication : Combinez l'exemple 2.4.19 et le quotient en deux temps.

2. Pour $p = 5$, montrez que $\mathbb{Z}[i]/(5) \cong \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$.
Indication : Le théorème des restes chinois peut être utile.

3. Sous quelles conditions sur p a-t-on un isomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$?
Indication : Si besoin, vous pouvez admettre l'existence d'une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$.

Exercice 5.
Soient A et B deux anneaux commutatifs. Quels sont les idéaux de $A \times B$? Quels sont les idéaux premiers de $A \times B$?

Exercice 6 ($\star$)**.**
Soit R un anneau commutatif. Déterminer $(R[t])^\times$.
On pourra se ramener au cas intègre en quotientant par des idéaux premiers de R.

Exercice 7 ($\star$ Introduction aux opérateurs différentiels)**.**
Soit A un anneau commutatif. Notons que s'il existe un homomorphisme d'anneaux injectif $K \hookrightarrow A$ où K est un corps, alors A a la structure d'un K-espace vectoriel. D'ailleurs, pour V un K-espace vectoriel,

$$\mathrm{End}_K(V) := \{\phi : V \to V \mid \phi \text{ est } K \text{ linéaire}\}$$

est un anneau, avec l'addition et la composition de fonctions comme opérations. On définit le **crochet de Lie** sur $\mathrm{End}_K(V)$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}_K(V) \times \mathrm{End}_K(V) & \to & \mathrm{End}_K(V) \\ (\phi, \psi) & \mapsto & [\phi, \psi] := \phi \circ \psi - \psi \circ \phi \end{array}$$

Supposons maintenant que A est un anneau commutatif tel que $K \hookrightarrow A$ où K est un corps. Nous désignons par $m_a \in \mathrm{End}_K(A)$ la multiplication par un élément $a \in A$,

$$m_a : \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ x & \mapsto & ax \end{array}.$$

Nous définissons les **opérateurs K-différentiels sur A de degré au plus** n inductivement par :

- $D_{\leq -1}(A) = \{m_0\}$,
- $D_{\leq 0}(A) = \{m_a \mid a \in A\}$,
- pour $n > 0$, posons $D_{\leq n}(A) = \{\psi \in \mathrm{End}_K(A) \mid [\psi, m_a] \in D_{\leq n-1}(A)\ \forall a \in A\}$.

Remarquez que $D_{\leq n}(A) \subseteq D_{\leq n+1}(A)$. On définit

$$D(A) := \bigcup_{n \geq -1} D_{\leq n}(A) \ \subset \mathrm{End}_K(A).$$

Montrer que $D(A)$ est un sous-anneau de $\mathrm{End}_K(A)$. On remarque que $K \ni \lambda \mapsto m_\lambda \in D_{\leq 0}(A)$ est le plongement de K dans $D(A)$ qui donne la structure d'espace vectoriel sur K.

A partir de maintenant, nous considérons le cas $A = K[x]$.

1. Montrer que le crochet de Lie

$$\begin{array}{ccc} D(K[x]) \times D(K[x]) & \to & D(K[x]) \\ (F, G) & \mapsto & [F, G] \end{array}$$

est K-bilinéaire.

2. Soit $\frac{\partial}{\partial x} \in \mathrm{End}_K(K[x])$ défini par $\frac{\partial}{\partial x}(x^i) = i \cdot x^{(i-1)}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrez que $\left[\frac{\partial}{\partial x}, m_x\right] = m_1$.
3. Prenons $\frac{\partial}{\partial x}$ comme au-dessus. Montrez que $\left[\frac{\partial}{\partial x}, m_{x^j}\right] = j \cdot m_{x^{(j-1)}}$ pour $j \in \mathbb{N}$.
4. Prenons $\frac{\partial}{\partial x}$ comme au-dessus. Montrez que $\frac{\partial}{\partial x} \in D_{\leq 1}(K[x])$.