Corrigé Test 4 - Algèbre linéaire. Série A 8 mars 2023

Exercice 1. *(3 + 3 + 3 = 9 points)*

On considère l'application $f : \mathbb{R}_1[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ par $f(at+b) = (3a-b)t^2 + 2b - 6a$.

a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$;

$\mathrm{Ker}(f) = \{at + b \in \mathbb{R}_1[t] \mid 3a = b\}$, donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est $(t+3)$.

b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$;

$\mathrm{Im}(f)$ est engendré par $f(1) = 2t^2 + 6 = 2(t^2+3)$ et $f(t) = 3t^2 - 6 = 3(t^2-2)$
donc une base de $\mathrm{Im} f$ est (t^2-2).

c) Enoncer le théorème du rang et le vérifier sur l'exemple de cet exercice.

Pour $f : V \to W$ avec V et W de dimension finie, on a $\dim(V) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$
Dans l'exemple de cet exercice, on a $2 = 1 + 1$.

Exercice 2. *(2 + 2 + 4 + 1 + 3 = 12 points)*

Dans $M_2(\mathbb{R})$, on considère les sous-ensembles U des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$,

V des matrices de la forme $\begin{pmatrix} t+s & r+s \\ 0 & t+s \end{pmatrix}$ et W des matrices de la forme $\begin{pmatrix} w & 0 \\ x & w \end{pmatrix}$.

a) Montrer que U est sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+a' & 0 \\ 0 & b+b' \end{pmatrix} \in U$ et $\lambda \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda b \end{pmatrix} \in U$.

b) Déterminer une base de V.

$\mathcal{B}_V = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

c) Déterminer les sous-espaces $U \cap V \cap W$ et $U + V + W$, en donnant une base de chacun d'eux.
Est-ce que $U + V + W$ est une somme directe de $M_2(\mathbb{R})$?

$\mathcal{B}_{U\cap V\cap W} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B}_{U+V+W} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$U + V + W = M_2(\mathbb{R})$ mais ce n'est pas une somme directe puisque $U \cap V \cap W \neq \{0\}$

d) Si U et V sont deux sous-espaces dans espace vectoriel E, énoncer la relation entre les dimensions de U, V, $U \cap V$ et $U + V$.

$\dim(U+V) = \dim U + \dim V$ - $\dim\,(U \cap V)$

e) Si U, V et W sont trois sous-espaces dans espace vectoriel E, conjecturer une relation entre les dimensions de $U+V+W$, U, V, W, $U\cap V$, $U \cap W$, $V \cap W$ et $U \cap V \cap W$.
Vérifier cette conjecture sur les espaces étudiés dans cet exercice.

$\dim(U+V+W) = \dim U + \dim V + \dim W$ - $\dim(U\cap V)$ - $\dim(U\cap W)$ - $\dim(V\cap W) + \dim(U\cap V\cap W)$
Dans notre exemple, on a bien $4 = 2 + 2 + 2$ - 1 -1 -1 + 1.

Exercice 3. *(2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4 = 15 points)*

On définit les deux applications linéaires

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;\,y) & \longmapsto & (2x-y\,;\,x+2y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;\,y) & \longmapsto & (x+y\,;\,3y\,;\,x) \end{array}$$

Soit encore les bases $\mathcal{B} = ((1;1)\,;\,(1;-2))$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = \big((0;1;0)\,;\,(0;0;1)\,;\,(\frac{1}{2};0;0)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer la matrice F représentant f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On calcule $f((1;0)) = (2;1)$ et $f((0;1)) = (-1;2)$ et on obtient $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Déterminer la matrice G représentant g relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

On calcule $g((1;0)) = (1;0;1)$ et $g((0;1)) = (1;3;0)$ et on obtient $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer H la matrice de $g \circ f$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

$$H = G \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

d) Déterminer la matrice de changement de base Q de $\mathcal{B}$ vers la base canonique de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire la matrice $(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}an}$.

Les colonnes de Q donnent les composantes des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimés dans la base canonique. Donc $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

e) Calculer la matrice de changement de base P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la matrice $(Id)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}}$.

Les colonnes de P donnent les composantes des vecteurs de la base canonique exprimés dans la base $\mathcal{B}$. Donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) Calculer la matrice G^* de g par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ à l'aide de la formule du changement de base qui fait intervenir un produit de trois matrices.

$$G^* = P\ G\ Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. *(3 + 2 + 1 + 2 = 8 points)*

Discuter et résoudre en fonction de k le système $\quad H_k \cdot X = b_k \quad$ où

$$H_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } \quad k \in \mathbb{R}.$$

On échelonne la matrice augmentée du système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ k & 1 & 1 & k^2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}(-k)E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & k-1 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & k^2-k \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & k-1 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & k^2-1 \end{array}\right)$$

Le système n'a pas de solution si $2-k-k^2 = -(k+2)(k-1) = 0$ et $k^2-1 = (k+1)(k-1) \neq 0$, c'est-à-dire lorsque $k = -2$.

Si $k = 1$, les deux dernière lignes sont nulles. La première ligne équivaut à l'équation $x+y+z = 1$ et $S = \{(1-a-b,\ a,\ b),\ a, b, \in \mathbb{R}\}$.

Supposons $k \neq -2$ et $k \neq 1$.

$$\xrightarrow[D_2\left(\frac{1}{k-1}\right)]{D_3\left(\frac{-1}{(k+2)(k-1)}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-(k+1)}{k+2} \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-(k+1)}{k+2} \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}(1)E_{13}(-(k+1))}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{(k+1)^2}{(k+2)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-(k+1)}{k+2} \end{array}\right) \quad \text{d'où} \quad S = \left\{ \left(\frac{(k+1)^2}{(k+2)},\ \frac{1}{k+2},\ \frac{-(k+1)}{k+2} \right) \right\} \text{ si } k \neq -2 \text{ et } k \neq 1.$$

Exercice 5. *(4 + 3 + 2 = 9 points)*

On donne une application linéaire $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par sa matrice A relativement à la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres éventuelles de α et les espaces propres associés.

$\det(A - \lambda I) = \lambda \cdot (3 - \lambda)^2 \ \Rightarrow\ $ deux valeurs propres : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 3$ (double).

$$E_0 : \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad E_0 = \ker(\alpha) = \langle (0;1;1) \rangle$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad E_3 = \langle (1;1;0), (0;0;1) \rangle$$

b) Dire pourquoi α est diagonalisable, déterminer une matrice de changement de base P et la matrice diagonale D correspondant à cette nouvelle base.

α est diagonalisable car $\dim E_0 + \dim E_3 = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad E_3$$

c) Caractériser géométriquement α.

α est un projection de direction $E_0 = \langle (0;1;1) \rangle$ sur le plan vectoriel $E_3 = \langle (1;1;0), (0;0;1) \rangle$, composée avec une homothétie de rapport 3 et de centre 0.

Exercice 6. *(5 + 1 = 6 points)*

Soit V un K-espace vectoriel et $\alpha : V \to V$ un isomorphisme.

a) Montrer que l'application réciproque $\alpha^{-1} : V \to V$ est K-linéaire.

Soient $u, v \in V$ et $\lambda \in K$.
On a $\quad \alpha(\alpha^{-1}(u+v)) = u + v \ = \ \alpha(\alpha^{-1}(u)) + \alpha(\alpha^{-1}(v)) \ = \ \alpha(\alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v))$.
En utilisant l'injectivité de α, on obtient $\quad \alpha^{-1}(u+v) = \alpha^{-1}(u) + \alpha^{-1}(v)$.

De même, comme $\quad \alpha(\alpha^{-1}(\lambda u)) = \lambda u \ = \ \lambda(\alpha(\alpha^{-1}(u))) \ = \ \alpha(\lambda(\alpha^{-1}(u)))$,
on obtient, par l'injectivité de α, $\quad \alpha^{-1}(\lambda u) = \lambda(\alpha^{-1}(u))$.

b) Pourquoi α^{-1} est-il aussi un isomorphisme ?

α^{-1} est un isomorphisme d'espaces vectoriels puisqu'elle est bijective et linéaire.

Exercice 7. *(5 points)*

On considère une application linéaire $p : V \to V$ qui vérifie $p \circ p = p$.

Montrer que les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1.

Soit λ une valeur propre de p. Alors il existe $v \neq 0$ tel que $p(v) = \lambda v$.

Par conséquent, $p(p(v)) = p(\lambda v) = \lambda p(v) = \lambda^2 v$. Or, $p(p(v)) = p(v) = \lambda v$, donc $\lambda v = \lambda^2 v$.

On a donc $(\lambda - \lambda^2)v = 0$ et les valeurs propres sont 1 et 0.