Rappel: Sous-ensembles ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$.

Déf: $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$
(1) $E = \emptyset$
(2) $E \neq \emptyset$ et pour chaque point $\bar{x} \in E$ il existe $\delta > 0$ tel que $B(\bar{x}, \delta) \subset E$

Déf: $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ son complémentaire $CE = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \notin E\}$ est ouvert. $\subset \mathbb{R}^n$

Déf. (Adhérance) Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble non-vide. Alors l'intersection de tous les sous-ensembles fermés contenant E est appelée l'adhérance de E.

Notation: $\bar{E}$ est l'adhérance de E dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque. $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé $\Longleftrightarrow$ $E = \bar{E}$ (par déf).

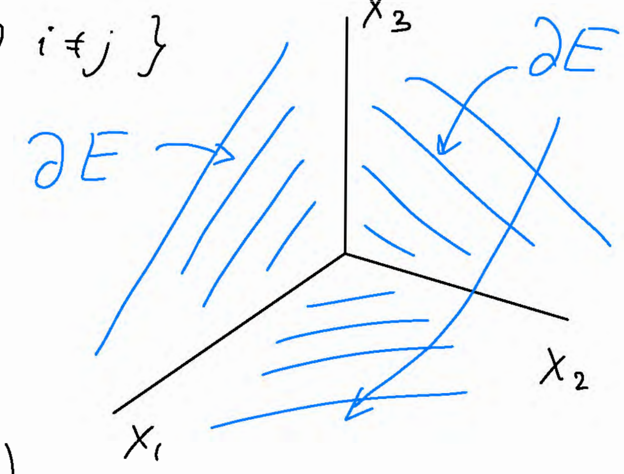
Déf. $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide, $E \neq \mathbb{R}^n$. Un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est un point de frontière de E si toute boule ouverte de centre $\bar{x}$ contient au moins un point de E et au moins un point de CE.

L'ensemble des points frontières de E est la frontière de E

Notation: ∂E

Ex 1. $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1 \dots n\} \Rightarrow \partial E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \exists i : x_i = 0$
ouvert
$x_j \geq 0 \; i \neq j\}$

$\bar{E} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1 \dots n\}$



Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. Alors:

(1) $\partial E \cap \mathring{E} = \emptyset$ (par déf)

(2) $\mathring{E} \cup \partial E = \bar{E}$ ($\mathring{E} \cup \partial E$ est fermé, et $E \subset \mathring{E} \cup \partial E$ minimal fermé)

l'interieur de E

(3) $\partial E = \bar{E} \setminus \mathring{E} = \bar{E} \cap C\mathring{E} = \{x \in \bar{E} : x \notin \mathring{E}\} \Rightarrow \partial E$ est fermé.

(4) $\partial \emptyset = \emptyset$, $\partial \mathbb{R}^n = \emptyset$ (déf).

Pourquoi faut-il distinguer entre les sous-ensembles ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$?
La topologie de $\mathbb{R}^n$ est liée aux propriétés des limites des suites d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

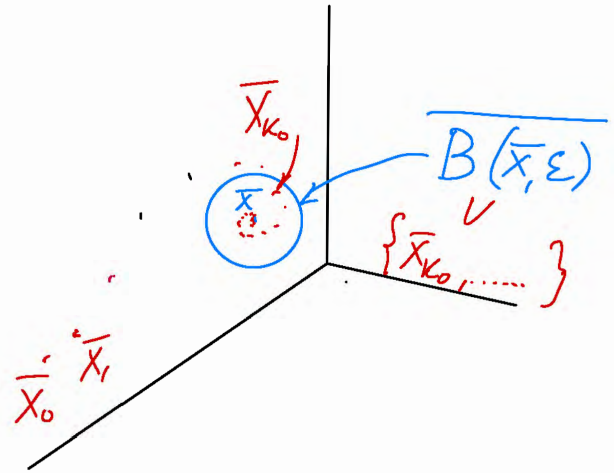
Déf Une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$

$$f : k \to \bar{x}_k = (x_{1k}, x_{2k} \dots x_{n_k}) \in \mathbb{R}^n$$

$\{\bar{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

Déf. $\{\bar{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ est convergente et admet pour limite $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si pour tout $\varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$: $\forall k \geq k_0$, $\|\bar{x}_k - \bar{x}\| \leq \varepsilon$.

$$\left(\Longleftrightarrow \bar{x}_k \in \overline{B(\bar{x}, \varepsilon)} \right)$$



Notation : $\lim_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{x}$

$\bar{x}_k = (x_{1,k} \dots x_{n,k})$

$\bar{x} = (x_1 \dots x_n)$

Remarque. $\lim_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{x} \iff$

$\iff \lim_{k\to\infty} x_{j,k} = x_j$ pour tout $j = 1 \dots n$; $\bar{x} = (x_1 \dots x_n)$

$$\underbrace{\|\bar{x}_k - \bar{x}\|}_{\leq \varepsilon} = \left(\sum_{j=1}^{n} \underbrace{(x_{j,k} - x_j)}_{\leq \varepsilon_j \ \forall j = 1 \dots n}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \iff$$

Si $\|\bar{x}_k - \bar{x}\| \leq \varepsilon \Rightarrow$ chaque $|x_{j,k} - x_j| \leq \varepsilon$

Si $|x_{j,k} - x_j| \leq \varepsilon \ \forall j \Rightarrow \|\bar{x}_k - \bar{x}\| \leq \sqrt{n}\, \varepsilon$

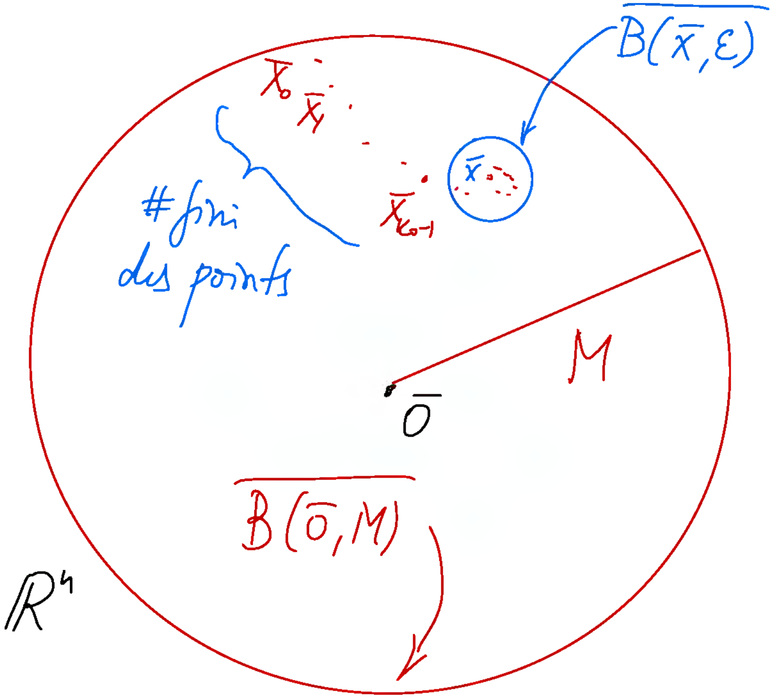
Propriétés : (1) La limite d'une suite $\{\bar{x}_k\}$, si elle existe, est unique.

(2) Toute suite convergente $\{\bar{x}_k\}$ est bornée.

$\left(\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \right.$ est contenue dans une boule fermé $\overline{B(\bar{0}, M)}$, $\left. M > 0 \right)$.

$$\lim_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{x} \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 \Rightarrow \|\bar{x}_k - \bar{x}\| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists M > 0 : \|\bar{x}_k\| \leq M \;\; \forall k \in \mathbb{N}.$$



(3) Thm Bolzano-Weierstrass :

De toute suite bornée $\{\bar{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ on peut extraire une sous-suite convergente.

[DZ §11.2.16].

Le lien entre les suites convergentes dans $\mathbb{R}^n$ et la topologie de $\mathbb{R}^n$:

Thm: $\underbrace{\text{(Un sous-ensemble non-vide } E \subset \mathbb{R}^n \text{ est fermé)}}_{P} \Longleftrightarrow$

$\underbrace{\text{(toute suite } \{\bar{x}_k\} \subset E \text{ d'éléments de } E \text{ qui converge, a pour limite un élément de } E.)}_{Q}$

Dém: $\Rightarrow$) par absurde P et $\neg Q \Rightarrow$ absurde.

Soit $\bar{x} = \lim_{k\to\infty} \bar{x}_k$, $\bar{x}_k \in E\ \forall k \in \mathbb{N}$. Supposons par absurde que $\underbrace{\bar{x} \notin E}_{\neg Q}$, $\underbrace{E \text{ est fermé}}_{P}$

$\Rightarrow \bar{x} \in CE$, où CE est ouvert dans $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : B(\bar{x},\delta) \subset CE \Rightarrow \underbrace{\{\bar{x}_k\ \forall k \in \mathbb{N}\}}_{\in E} \cap \underbrace{B(\bar{x},\delta)}_{\subset CE} = \emptyset$

D'autre côté, $\lim_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{x} \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0,\ \bar{x}_k \in \overline{B(\bar{x},\tfrac{\delta}{2})} \subset B(\bar{x},\delta)$

$\Rightarrow$ absurde

Alors $P \Rightarrow Q$.

$\Leftarrow$) par contraposée: $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

Supposons que E n'est pas fermé. $\Rightarrow CE$ n'est pas ouvert.

$\Rightarrow \exists\ \bar{y} \in CE : \forall k \in \mathbb{N}_+\ B(\bar{y},\tfrac{1}{k}) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ \bar{y}_k \in B(\bar{y},\tfrac{1}{k})$ tel que $\bar{y}_k \in E$

$\Rightarrow$ on a obtenu une suite $\{\bar{y}_k\}_{k\in\mathbb{N}_+} \subset E$ et $\lim_{k\to\infty} \bar{y}_k = \bar{y} \in CE \Leftrightarrow \bar{y} \notin E$.

$\Rightarrow \neg Q$.

Alors $Q \Rightarrow P$

$\blacksquare$

Remarque. Pour construire l'adhérance $\bar{E}$ d'un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$, il faut et il suffit d'ajouter les limites de toutes suites convergentes d'éléments de E.

[Voir DZ §11.3.15].

Déf. Un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^n$ est compact s'il est fermé et borné.

Ex 1. Boule fermé

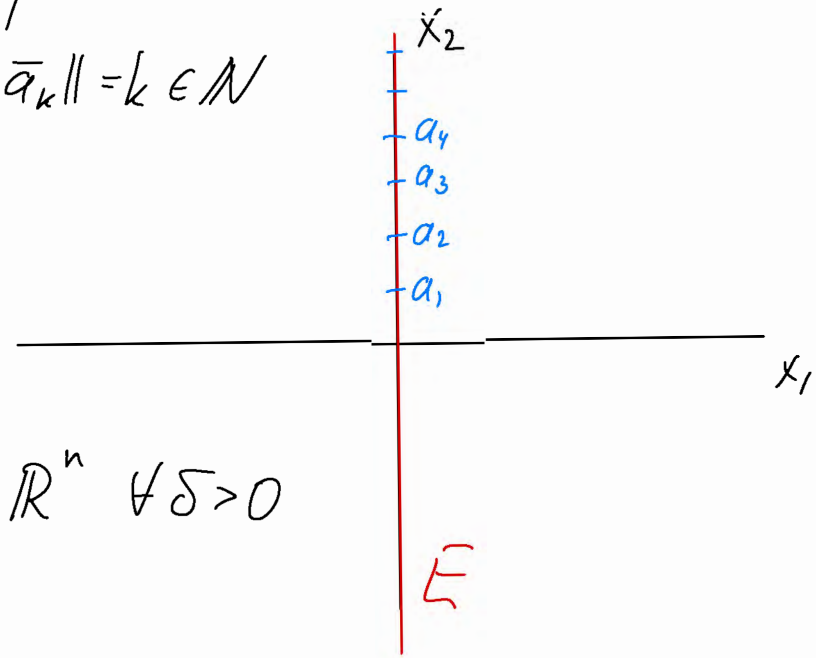
$$\left.\begin{aligned} &\overline{B(\bar{x},\delta)} = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| \leq \delta\} \text{ fermé} \\ &\overline{B(\bar{x},\delta)} \subset \overline{B(\bar{0}, \|\bar{x}\|+\delta)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{compact.}$$

Ex 2. $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : n \geq 2,\ x_1 = 0\}$ - fermé, mais pas borné

$\{\bar{a}_k = (0, k, 0, 0 \ldots)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset E$, les normes $\|\bar{a}_k\| = k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ E n'est pas borné

$\Rightarrow$ E n'est pas compact.



Ex 3. $B(\bar{x},\delta)$ n'est pas compact : $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $\forall \delta > 0$

borné $B(\bar{x},\delta) \subset \overline{B(\bar{x},\delta)}$

pas fermé.

Thm (Heine-Borel-Lebesgue) Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact $\Longleftrightarrow$ de tout recouvrement de E par des sous-ensembles ouverts dans $\mathbb{R}^n$

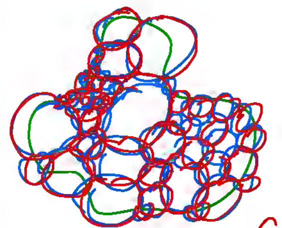
$$\Big(E \subset \bigcup_{i \in I} A_i\ ,\ A_i \subset \mathbb{R}^n \text{ ouverts},\ \forall i \in I \text{ - un recouvrement de } E\Big)$$

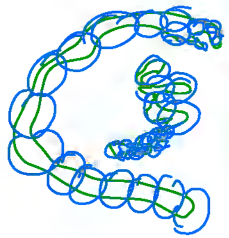
on peut extraire une famille finie d'ensembles que forment un recouvrement de E.

$$\Big(E \subset \bigcup_{i \in I} A_i \qquad A_i \subset \mathbb{R}^n \text{ ouverts} \Rightarrow \exists \{A_{i_j}\}_{j=1}^m : E \subset \bigcup_{j=1}^m A_{i_j}\Big)$$

peut être innombrable !

E compact $\subset \mathbb{R}^n$





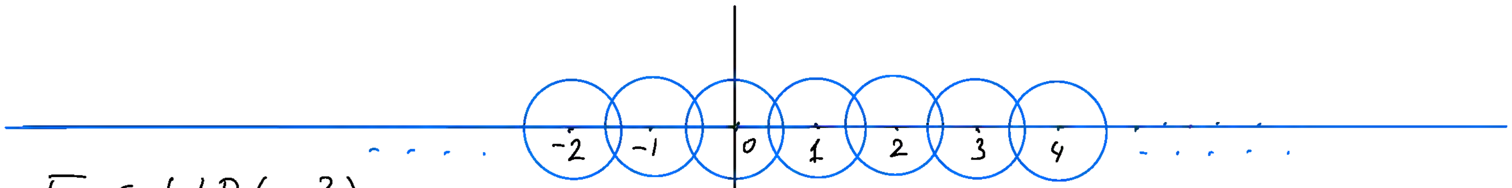
$E \subset \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow$

$E \subset \bigcup_{j=1}^m A_j$

infini d'ensembles $\Rightarrow$ # fini d'ensembles

Ne marche pas si E n'est pas compact !!!

Ex1. Une droite dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ est fermé, pas borné $\Rightarrow$ pas compact.

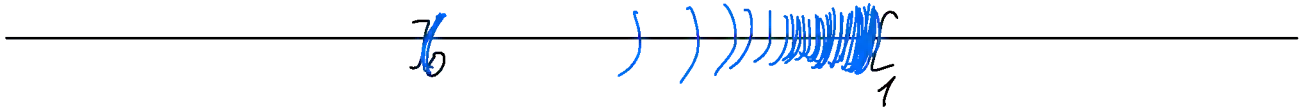


$E \subset \mathbb{R}^2$

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B(n, \tfrac{2}{3})$$

$\Rightarrow$ on ne peut pas jeter un seul disque $\Rightarrow$ ne peut pas choisir de sous-recouvrement fini.

Ex2. Intervalle ouvert $E =]0,1[\subset \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ n'est pas fermé $\Rightarrow$ n'est pas compact.



$E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+}]0, \frac{i}{i+1}[$ - un recouvrement de E.

$\Rightarrow$ on ne peut pas choisir un sous-recouvrement fini.

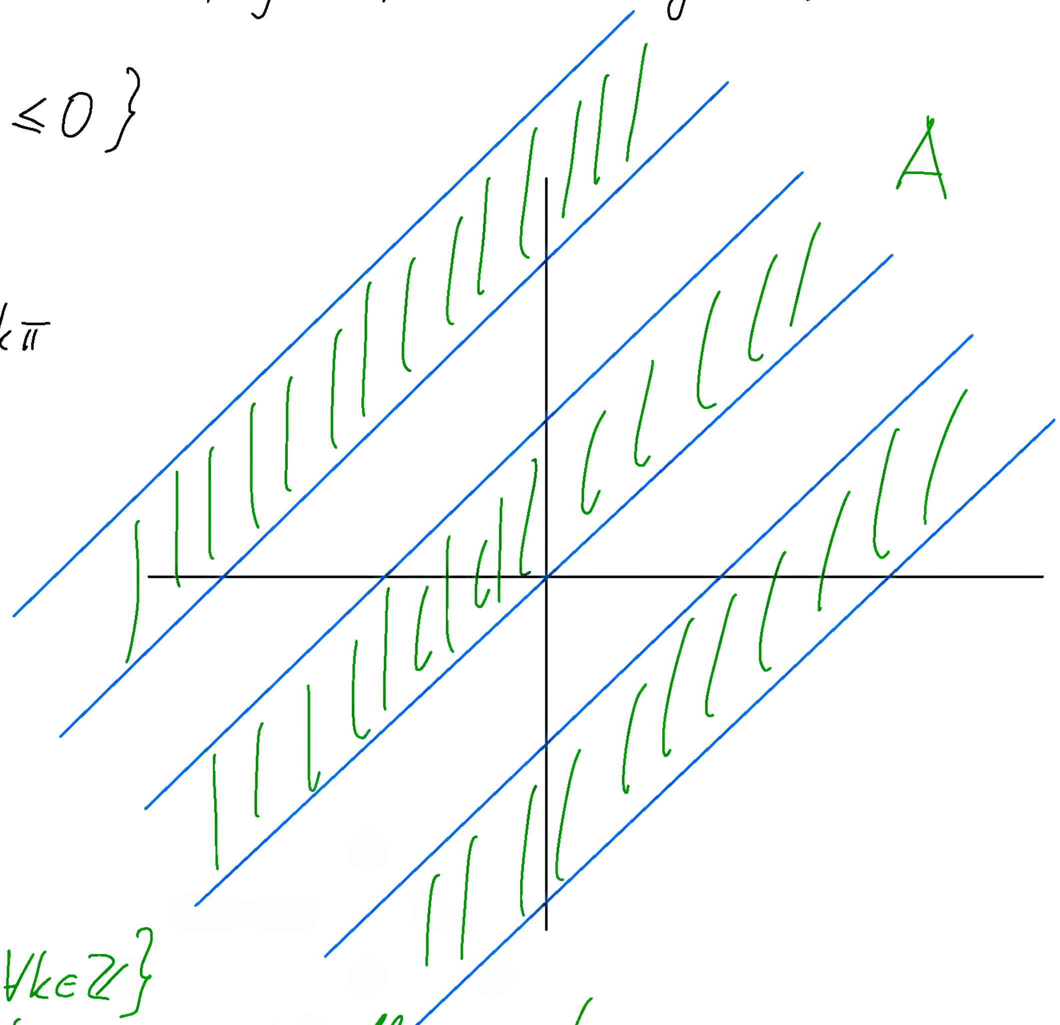
Exemples des sous-ensembles dans $\mathbb{R}^n$: ouvert, fermé, ni ouvert ni fermé ?

Ex1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \log(\sin(y-x)) \leq 0\}$

log bien défini $\Rightarrow$ $\sin(y-x) > 0$

$\Rightarrow$ $2k\pi + 0 < y - x < \pi + 2k\pi$
$\forall k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $x + 2k\pi < y < x + \pi(2k+1)$
$\forall k \in \mathbb{Z}$



$\log(t) \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$

$t = \sin(y-x) \leq 1$ toujours vrai.

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2k\pi < y < x + \pi(2k+1) \ \forall k \in \mathbb{Z}\}$
est un sous-ensemble ouvert.

Ex 2.

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{xy} < 2\}$.

$\sqrt{xy}$ existe $\Rightarrow xy \geq 0$, aussi $xy < 4$

(1) $x > 0 \Rightarrow y \geq 0$ et $xy < 4 \Leftrightarrow y < \frac{4}{x}$ et $y \geq 0$

(2) $x < 0 \Rightarrow y \leq 0$ et $xy < 4 \Leftrightarrow y > \frac{4}{x}$ et $y \leq 0$

(3) $x = 0 \Rightarrow y$ arbitraire

B n'est ni ouvert ni fermé