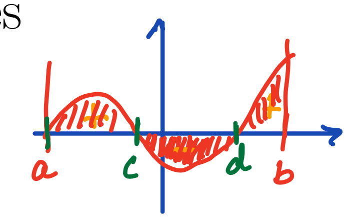
II. Intégrales définies et indéfinies



La semaine passée, nous avons introduit les sommes de Darboux et la notion d'intégrabilité au sens de Riemann. Ainsi, l'intégrale *définie* d'une fonction bornée (et la plupart du temps continue) et intégrable sur un intervalle est un nombre qui mesure l'aire de la surface comprise entre l'axe Ox et le graphe de la fonction. Notre but aujourd'hui est d'établir quelques propriétés élémentaires de l'intégrale définie, puis, en considérant l'intégrale définie comme une fonction de ses bornes d'intégration, de retrouver la notion de primitive, ou d'intégrale indéfinie. Ceci nous permettra alors de développer de puissantes techniques d'intégration, plus agréables à manier que les calculs de limites de sommes de Darboux !

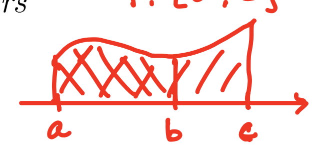
1 L'intégrale en fonction de ses bornes

Avant de passer à l'un des résultats les plus importants de ce jour, nous énonçons un lemme, dont la preuve est évidente par l'interprétation géométrique de l'intégrale de Riemann.

Lemme 1.1. *Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a < c < b$. Alors*

$f : [a ; c] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



Pour que la formule soit valable en toute généralité, on définit $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$. En
c'est-à-dire si $c \notin [a ; b]$
particulier, $\int_a^a f(x)dx = 0$, ce qui correspond bien à l'interprétation en tant qu'aire d'une surface réduite à un segment.

Nous voudrons aussi comparer les intégrales définies de fonctions "comparables".

Lemme 1.2. *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $a \leq x \leq b$. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration. Comme f et g sont continues, elles sont intégrables. Pour comparer les valeurs de leurs intégrales, nous utilisons le calcul de l'intégrale définie par les sommes de Darboux supérieures.

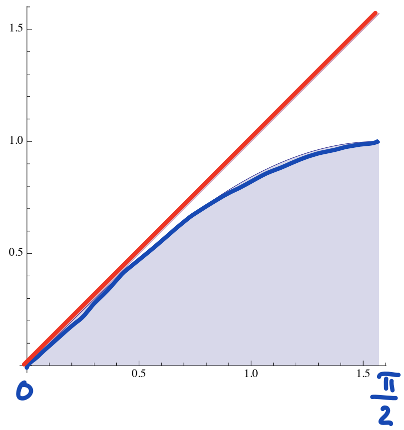
Sur chaque intervalle $[x_{i-1} ; x_i]$, le maximum M_i de f est toujours inférieur ou égal au maximum M_i' de g.

$$\Longrightarrow \quad S_{\sigma_n}(f) \leq S_{\sigma_n}(g)$$

Le résultat $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ s'obtient par passage à la limite. □

Exemple 1.3. On se souvient que $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$. On en déduit que

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx \leq \int_0^{\pi/2} x\,dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 1 = 1$$

En ce moment, nous ne savons pas encore calculer l'aire grisée indiquée sur l'illustration ci-dessus, mais, patience !, dans une petite heure ce sera chose faite. D'autres résultats sont évidents du point de vue géométrique, alors qu'ils sont durs à comprendre analytiquement. La linéarité de l'intégrale est fastidieuse à démontrer avec la définition de Riemann, mais facile avec le Théorème fondamental du calcul intégral que nous verrons tout à l'heure. Voici une liste non exhaustive et sans preuve de propriétés d'intégrabilité.

Proposition 1.4. *Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors les propriétés suivantes sont vraies :*

a) les fonctions f^2, $\sqrt{f}$, $f^+ = \max\{f, 0\}$ et $f^- = \max\{-f, 0\}$ sont intégrables ;

b) les fonctions $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $f + g$ et $f \cdot g$ sont intégrables ;

c) s'il existe $\delta > 0$ tel que $g(x) \geq \delta$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont intégrables.

L'idée pour montrer que f^2 est intégrable serait de voir que sur $[a, b]$, si la différence entre la somme de Darboux inférieure et supérieure pour f est plus petite que ε, alors la différence pour f^2 est inférieure à $(a^2 + b^2)\varepsilon$. Comme ε peut être rendu arbitrairement petit, la quantité $(a^2 + b^2)\varepsilon$ aussi...

Remarque 1.5. Attention ! Le fait que f^2 est intégrable ne veut pas du tout dire que l'intégrale du carré d'une fonction est égale au carré de l'intégrale de cette fonction ! C'est archifaux ! En fait, ce serait une malchance incroyable de tomber sur une fonction pour laquelle ce serait vrai...

Construisons un contre-exemple élémentaire, pour lequel les intégrales sont facilement calculables.

Par exemple, $f(x) = 1$ sur $I = [0;2]$

$$\left(\int_0^2 1\,dx\right)^2 = (2\cdot 1)^2 = 4 \neq 2 = \int_0^2 1^2\,dx$$

2 Le Théorème fondamental

Vous rappelez-vous que toute fonction continue définie sur un intervalle qui prend des valeurs positives et négatives s'annule forcément en (au moins) un point ? C'est le Théorème de la valeur intermédiaire, dont nous allons découvrir une nouvelle application.

Théorème 2.1. Théorème de la moyenne. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe un élément c de $[a, b]$ tel que*

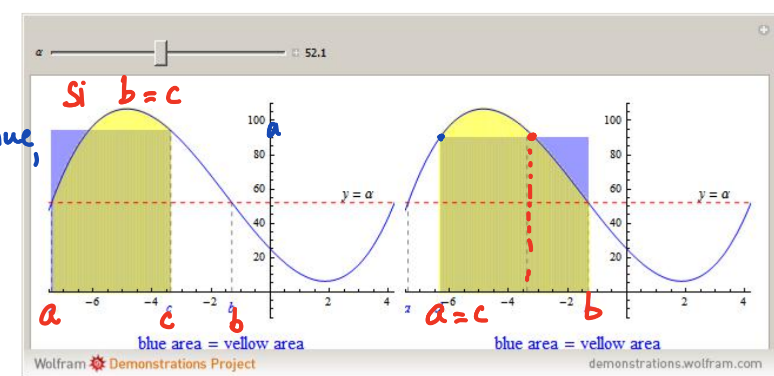
$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a).$$

En d'autres termes, l'aire de la surface comprise entre l'axe Ox et le graphe de f est égal à l'aire du rectangle de base $[a, b]$ et de hauteur $f(c)$:

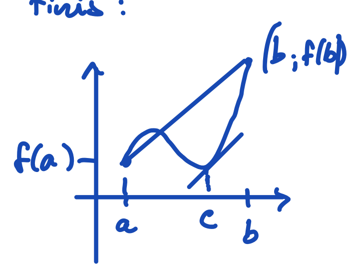
Thm de la valeur intermédiaire :

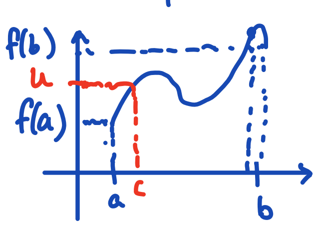
$f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue, alors

$\forall u \in [m\,;M]$, $\exists\, c \in [a;b]$ t.q. $f(c) = u$



Thm des accroissements finis :





Démonstration. Définissons m le minimum de la fonction f sur $[a, b]$ et M son maximum. Comme $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x, on a que

$$m\,(b-a) = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M\,(b-a)$$

$: (b-a)$

$$\iff \quad m \leq h = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$$

$\Rightarrow m \leq h \leq M$ et par le thm de la valeur intermédiaire,

$$\exists\, c \in [a;b] \text{ t.q. } f(c) = h = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \Rightarrow f(c)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Ce théorème apparemment anodin va nous permettre de faire le lien avec le calcul des primitives. Si f est une fonction définie et continue sur $[a, b]$, une *primitive* de f est une fonction continue $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dont la dérivée est f, c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$ pour tout $a < x < b$. Puisque les seules fonctions continues dont la dérivée est nulle sont les fonctions constantes, nous avions vu que deux primitives de f diffèrent toujours d'une constante. Autrement dit, si l'on trouve une primitive $F(x)$, on les connaît toutes ; elles seront toutes de la forme $F(x) + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

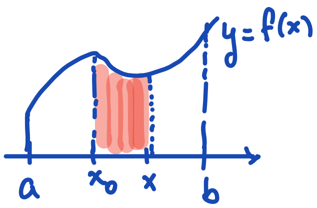
Théorème 2.2. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f sur $[a, b]$.

Démonstration. Soit x_0 un nombre arbitraire fixé dans $]a, b[$. Nous allons démontrer que $F'(x_0) = f(x_0)$ en appliquant la définition de la dérivée. Calculons donc à l'aide du lemme 1.1

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$



Thm de la moyenne : $\exists\, c(x) \in [x_0; x]$ t.q.

$$F(x) - F(x_0) = f\big(c(x)\big)\cdot(x - x_0) \iff \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(c(x))$$

Remarquons que cette formule ne dépend pas du fait que $x > x_0$, puisque les deux signes négatifs qui apparaissent lorsque $x < x_0$ se compensent. D'autre part, lorsque x tend vers x_0, $c(x)$ aussi tend vers x_0 car il est compris entre x et x_0. Par conséquent,

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f\big(c(x)\big) = f(x_0)$$

Il reste à montrer que F est continue à droite en a et à gauche en b. Nous nous occuperons seulement de la première affirmation et l'autre est laissée en exercice. Par définition de F, on a $F(a) = 0$. Maintenant, si $x > a$, il existe $d(x)$ entre a et x tel que

$$\underline{F(x)} = F(x) - \underbrace{F(a)}_{=0} = \int_a^x f(t)dt = f(d(x)) \cdot (x - a).$$

Soit m le minimum et M le maximum de la fonction f.

$$m \leq f(d(x)) \leq M \quad \forall x \iff m(x-a) \leq \underbrace{f(d(x))(x-a)}_{=F(x)} \leq M(x-a)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} \underbrace{f(d(x))}_{\text{borné}} \underbrace{(x-a)}_{\to 0} = 0 = F(a)$$

□

La démonstration du théorème fondamental du calcul intégral se fait en trois lignes maintenant !

Théorème 2.3. Théorème fondamental du calcul intégral. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et G une primitive de f sur $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Démonstration.

Soit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Si $G(x)$ est aussi une primitive de f, alors $G(x) = F(x) + c$.

$$\Rightarrow G(b) - G(a) = (F(b)+c) - (F(a)+c) = F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} = \int_a^b f(t)\,dt.$$

□

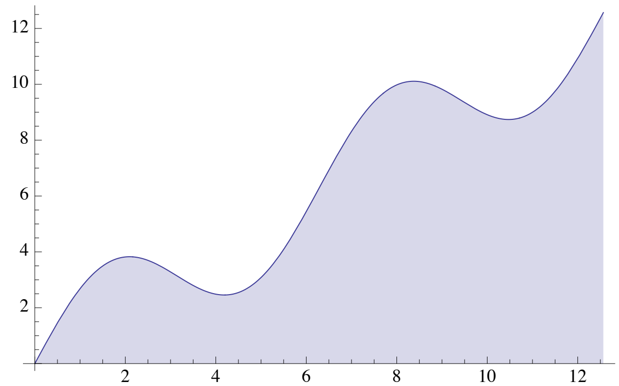
Exemple 2.4. Quelle est l'aire de la surface délimitée par le graphe de la fonction $f(x) = 2\sin x + x$ pour $0 \leq x \leq 4\pi$?

Il n'est pas nécessaire de calculer des sommes de Darboux, mais il nous suffit simplement de trouver une primitive de $f(x) = 2\sin x + x$. Le choix évident est

$$F(x) = -2\cos(x) + \frac{x^2}{2}$$

Le Théorème fondamental du calcul intégral nous permet de calculer

$$\int_0^{4\pi} (2\sin(x) + x)\,dx = \left[-2\cos(x) + \frac{x^2}{2}\right]_0^{4\pi}$$
$$= \left(-2\cos(4\pi) + \frac{(4\pi)^2}{2}\right) - \left(-2\cos(0) + \frac{0^2}{2}\right)$$
$$= -2\cdot 1 + 8\pi^2 + 2 = 8\pi^2 \simeq 78,96\ldots$$



On notera souvent $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ ou $[F(x)]_a^b$.

Remarque 2.5. Attention ! Ce n'est parce que l'intégrale définie d'une fonction permet de construire une primitive de cette fonction que cette primitive est pour autant une fonction que nous connaissions ou que nous puissions décrire ! L'un des exemples les plus célèbres est la fonction $f(x) = e^{-x^2}$. Qui est $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$?

3 Quelques propriétés de l'intégrale

Voici finalement venu le temps des démonstrations aisées grâce au Théorème fondamental.

Proposition 3.1. Linéarité de l'intégrale. *Soient* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Alors* $\lambda f + \mu g$ *est intégrable et*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration. Une combinaison linéaire de fonctions continues est aussi continue, donc intégrable. Il reste donc à montrer le résultat de la linéarité de $\int_a^b$. Posons pour tout $a \leq x \leq b$

$$K(x) = \int_a^x (\lambda f(t) + \mu g(t))dt - \lambda \int_a^x f(t)dt - \mu \int_a^x g(t)dt.$$

La dérivée étant linéaire, on déduit par le Théorème fondamental du calcul intégral que

$$K'(x) = \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) - \lambda f(x) - \mu g(x) = 0$$

$\Rightarrow$ $K(x) =$ constante et comme $K(a) = 0$, on a $K(x) = 0$ $\forall x$

$\Rightarrow$ $K(b) = 0$ d'où le résultat.

□

Proposition 3.2. Valeur absolue. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Démonstration. Nous décomposons la fonction f en partie positive $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et partie négative $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Alors $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ et $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ pour tout x. Ainsi, f et sa valeur absolue sont somme et différence de deux fonctions intégrables et positives. Par conséquent,

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b (f^+(x) - f^-(x))dx \right| = \left| \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx \right|,$$

par linéarité de l'intégrale. D'autre part,

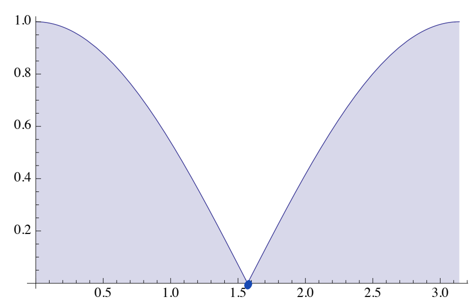
$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b (f^+(x) + f^-(x))dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx.$$

L'inégalité triangulaire $|u - v| \leq u + v$ pour deux nombres positifs permet de conclure. □

Exemple 3.3. Considérons la fonction cosinus définie sur $[0, \pi]$. Puisque une primitive de cos est donnée par sin, on calcule d'une part

$$\left| \int_0^\pi \cos x dx \right| = \left| \sin(x) \Big|_0^\pi \right| = \left| \sin \pi - \sin(0) \right| = |0 - 0| = 0$$

D'autre part la fonction $|\cos| = \cos^+ + \cos^-$ est définie en "deux morceaux".



Elle vaut $\cos(x)$ pour $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $-\cos(x)$ pour $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} |\cos(x)|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 - 0 + 1 = 2$$

Pour terminer, regardons comment le calcul intégral nous permet de calculer l'aire de certaines surfaces qui ne sont pas nécessairement déterminées par le graphe d'une seule fonction.

Exemple 3.4. On veut calculer l'aire de la surface comprise entre la cubique d'équation $y = x^3 + 2x^2 + x$ et la parabole d'axe vertical passant par les points $(0;0)$, $(-1,5;0)$ et $(-2;-2)$. Il faut d'abord déterminer l'équation de cette parabole.

Axe vertical et passe par l'origine $\Rightarrow y = ax^2 + bx = a\left(x + \frac{3}{2}\right)x$

$\uparrow$ $-1,5$ est un zéro de l'équation

On remplace x et y par $(-2;-2)$ et on trouve

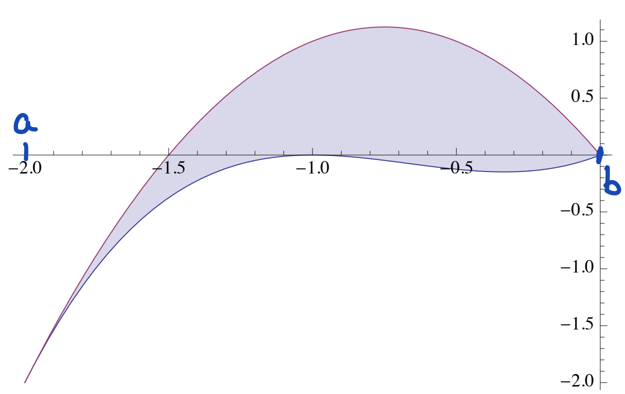
$$y = -2x^2 - 3x \quad (a = -2)$$

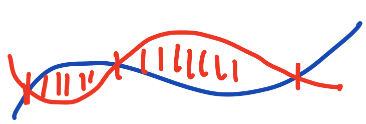
Graphiquement, on veut calculer la surface grisée. Les courbes se coupent en $(0;0)$ et en $(-2;-2)$

$$\int_{-2}^{0} -2x^2 - 3x - \left(x^3 + 2x^2 + x\right) dx =$$

$$\int_{-2}^{0} -x^3 - 4x^2 - 4x \; dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - 2x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(-4 + \frac{32}{3} - 8\right)$$

$$= \frac{4}{3}$$





Remarque : si il y a plus de 2 intersections, intégrer par morceaux.