Prof. Friedrich Eisenbrand 24 mars 2023

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2023

Série 4

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Une matrice $A \in K^{n\times n}$ est appelée *diagonalisable* si l'endomorphisme $\phi : K^n \mapsto K^n$ défini par $\phi(x) = Ax$ est diagonalisable (il possède une base de vecteurs propres).

Démontrer que A est diagonalisable si et seulement s'il existe $U \in K^{n\times n}$ inversible telle que $U^{-1}AU$ est une matrice diagonale.

Exercice 2. Soit V un espace vectoriel sur un corps K de dimension finie, et $f : V \mapsto V$ un endomorphisme. Soit $p : V \mapsto V$ un automorphisme (c.-à-d. un endomorphisme inversible). Montrer que $\lambda \in K$ est une valeur propre de f si et seulement si λ est une valeur propre de l'endomorphisme $p^{-1} \circ f \circ p$.

Exercice 3. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & \mathrm{i} & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Exercice 4. Calculer les valeurs propres et les espaces propres des matrices suivantes sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ (avec $\varphi \in [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}$ dans le cas 2).

$$1.\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 2.\ A_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \qquad 3.\ A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Considérons la suite de Fibonacci $\{F_n\}_{n\geq 0}$ définie récursivement par

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 2). \end{cases}$$

Soit $X_n := \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ pour $n \geq 0$.

1. Trouver la matrice $A \in \mathbb{R}^2$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser $A = PDP^{-1}$ en explicitant P et D.
3. En déduire de la relation $X_n = A^n X_0$ une expression fonctionnelle pour F_n en fonction de n.

Exercice 6.

1. Vérifier le Théorème de Cayley–Hamilton sur la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$
2. Soient K un corps, et $A \in K^{2\times 2}$. Soit $p_A(t) = t^2 + a_1 t + a_0$ avec $a_0 \neq 0$. Démontrer que A est inversible et exprimer son inverse comme combinaison K-linéaire de I et A.
3. Considérer le Théorème de Cayley–Hamilton. On pourrait penser qu'il est possible d'utiliser l'argument $p_A(A) = \det(A \cdot I_n - A) = 0$ pour montrer le théorème. Montrer que ce raisonnement est faux.

Exercice 7. (*)
Soient K un corps, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ les valeurs propres d'une matrice $A \in K^{n\times n}$ et $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités algébriques. Soit $m_1 + \cdots + m_r = n$.

Définition: La *trace* de A est définie par $\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Démontrer les assertions suivantes:

i) $\det(A) = \prod_{i=1}^r \lambda_i^{m_i}$

ii) Si $p_A(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$, montrer que $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(A)$.

iii) $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^r m_i \lambda_i$