Algèbre linéaire avancée II
printemps 2023

Série 4 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Une matrice $A \in K^{n\times n}$ est appelée *diagonalisable* si l'endomorphisme $\phi : K^n \mapsto K^n$ défini par $\phi(x) = Ax$ est diagonalisable (il possède une base de vecteurs propres).

Démontrer que A est diagonalisable si et seulement s'il existe $U \in K^{n\times n}$ inversible telle que $U^{-1}AU$ est une matrice diagonale.

Solution. *Notons $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ la base de vecteurs propres associés à A : $Av_i = \lambda_i v_i \ \forall i = 1, \dots, n$. Dans cette base, l'endomorphisme ϕ admet pour matrice $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (cf. exercice 1, série 3).*

Or la matrice A correspond, elle, à la matrice de ϕ dans la base canonique. A et D sont donc liées par la matrice de changement de base $P = P_{B,I}$ qui envoie des coordonées dans la base B vers des coordonnées dans la base canonique.

$$D = P^{-1}AP.$$

Remarquons que $P_{I,B}$ envoie $e_i = [v_i]_B$ sur $v_i = [v_i]_I$. Ses colonnes sont donc les vecteurs de B (les vecteurs propres de A).

En outre, l'ordre des vecteurs propres dans P correspond à l'ordre des valeurs propres associées dans D.

Exercice 2. Soit V un espace vectoriel sur un corps K de dimension finie, et $f : V \mapsto V$ un endomorphisme. Soit $p : V \mapsto V$ un automorphisme (c.-à-d. un endomorphisme inversible). Montrer que $\lambda \in K$ est une valeur propre de f si et seulement si λ est une valeur propre de l'endomorphisme $p^{-1} \circ f \circ p$.

Solution.

- *Soit λ une valeur propre de f. On montre que c'est une valeur propre de $p^{-1} \circ f \circ p$. En effet, soit $v \neq 0$ un vecteur propre de f de valeur propre λ. On considère $w = p^{-1}(v)$. Alors $w \neq 0$ par injectivité de p^{-1} et*

$$p^{-1} \circ f \circ p(w) = p^{-1} \circ f(v) = p^{-1}(\lambda v) = \lambda p^{-1}(v) = \lambda w$$

  où on a utilisé la linéarité de p^{-1} pour sortir λ.

- *Soit λ une valeur propre de $p^{-1} \circ f \circ p$. On montre que c'est une valeur propre de f. En effet, soit $w \neq 0$ un vecteur propre de $p^{-1} \circ f \circ p$ de valeur propre λ. On considère $v = p(w)$. Alors $v \neq 0$ par injectivité de p et*

$$f(v) = f \circ p(w) = p \circ p^{-1} \circ f \circ p(w) = p(\lambda w) = \lambda p(w) = \lambda v$$

  où on a utilisé la linéarité de p pour sortir λ.

Exercice 3. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & \mathrm{i} & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Solution. *1. La matrice A est triangulaire supérieure. On sait que les valeurs propres sont les éléments diagonaux : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$, $\lambda_3 = -1$. Les valeurs propres sont toutes distinctes les unes des autres, donc la matrice A est diagonalisable.*

2. Les valeurs propres de B sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} p_B(t) = \det(tI_3 - B) &= \det \begin{pmatrix} t-5 & 1 & 1 \\ 1 & t-5 & 1 \\ 1 & 1 & t-5 \end{pmatrix} \\ &= (t-5)^3 + 1 + 1 - (t-5)(1+1+1) \\ &= t^3 - 15t^2 + 72t - 108. \end{aligned}$$

On voit que la matrice $6I_3 - B$ a tous ses éléments égaux à 1, elle est donc singulière. Ainsi, 6 est une racine de p_B. On peut alors factoriser p_B et obtenir

$$p_B(t) = (t-6)(t^2 - 9t + 18) = (t-3)(t-6)(t-6).$$

Les valeurs propres de B sont alors $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$. On a $m_{\text{alg}}(3) = 1$ et $m_{\text{alg}}(6) = 2$. D'office on a $m_{\text{geom}}(3) = 1$, mais nous devons encore calculer la dimension de $E_6(B)$ afin de savoir si on a $m_{\text{geom}}(6) = 2$ ou $m_{\text{geom}}(6) = 1$. On a

$$E_6(B) = \ker(6\, I_3 - B) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit que $\operatorname{rank}(6I_3 - B) = 1$. Donc la dimension du noyau est 2, et ainsi $m_{\text{geom}}(6) = 2$. On obtient que $m_{\text{alg}}(\lambda) = m_{\text{geom}}(\lambda)$ pour toutes les valeurs propres λ et donc B est diagonalisable.

3. *La matrice C a pour polynôme caractéristique*

$$p_C(t) = t^3 - t^2 - t + 1 = (t+1)(t-1)(t-1).$$

Ses valeurs propres sont donc -1 et 1. On obtient $m_{\text{alg}}(-1) = 1 = m_{\text{geom}}(-1)$ et $m_{\text{alg}}(1) = 2$. Par ailleurs,

$$E_1(C) = \ker(I_3 - C) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit que $\dim E_1(C) = 1$, et on obtient $m_{\text{geom}}(1) = 1$. Comme $m_{\text{geom}}(1) = 1 \neq 2 = m_{\text{alg}}(1)$, la matrice C n'est pas diagonalisable.

Exercice 4. Calculer les valeurs propres et les espaces propres des matrices suivantes sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ (avec $\varphi \in [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}$ dans le cas 2).

$$1.\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 2.\ A_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \qquad 3.\ A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution. 1. *Le polynôme charactéristique est $\det(A_1 - \lambda I) = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$. Pour $\lambda_1 = 1$, on a $A_1 x = x \Leftrightarrow x_1 = x_2$, et pour $\lambda_2 = -1$, on a $A_2 x = -x \Leftrightarrow x_2 = -x_1$. Les espaces propres sont alors $E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ pour λ_1, et $E_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ pour λ_2. Les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sont identiques.*

2. *$\det(A_2 - \lambda I) = (\cos(\varphi) - \lambda)^2 + \sin^2(\varphi) = \lambda^2 - 2\lambda\cos(\varphi) + 1$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\varphi \notin \{\pi t \mid t \in \mathbb{Z}\}$, ce terme n'a pas de racine réelle, c-à-d nous n'avons pas de valeur propre dans $\mathbb{R}$. En effet, le discriminant du polynôme caractéristique est $\Delta = (-2\cos(\varphi))^2 - 4 = 4(\cos(\varphi)^2 - 1) < 0$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\varphi \in \{\pi t \mid t \in \mathbb{Z}\}$, nous avons $A_2 = I$ et tous les vecteurs non égaux à 0 sont vecteurs propres.*

   Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a $\lambda_{1,2} = \cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi)$. La valeur propre λ_1 est associée à l'espace propre

$$\sin(\varphi)\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right\}.$$

3. *On a*

$$\begin{aligned} \det(A_3 - \lambda I) &= (3-\lambda)^2(5-\lambda) + 2 - 2(3-\lambda) - (5-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 \\ &= (6-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) \end{aligned}$$

   Alors, $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$ et

$$E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad E_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad E_3 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 5. Considérons la suite de Fibonacci $\{F_n\}_{n\geq 0}$ définie récursivement par

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 2). \end{cases}$$

Soit $X_n := \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ pour $n \geq 0$.

1. Trouver la matrice $A \in \mathbb{R}^2$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser $A = PDP^{-1}$ en explicitant P et D.
3. En déduire de la relation $X_n = A^n X_0$ une expression fonctionnelle pour F_n en fonction de n.

Solution. *On trouve* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *qu'on diagonalise en calculant d'abord le polynôme caractéristique* p_A.

$$p_A(\lambda) = (-1)^2\lambda^2 + (-1)^1 \operatorname{Tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Ses racines sont $\phi_\pm = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, *le nombre d'or et son conjugué. Des vecteurs propres associés sont par exemple* $v_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \phi_\pm \end{pmatrix}$.

On a alors $P = \begin{pmatrix} v_+ & v_- \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} \phi_+ & 0 \\ 0 & \phi_- \end{pmatrix}$ *qui vérifient* $A = PDP^{-1}$.

Par conséquent, $X_n = A^n X_0 = PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *On ne s'intéresse donc qu'à la première coordonnée de la deuxième colonne de* PD^nP^{-1}, *qui donne* $F_n = \frac{\phi_+^n - \phi_-^n}{\sqrt{5}}$.

Exercice 6.

1. Vérifier le Théorème de Cayley–Hamilton sur la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

2. Soient K un corps, et $A \in K^{2\times 2}$. Soit $p_A(t) = t^2 + a_1 t + a_0$ avec $a_0 \neq 0$. Démontrer que A est inversible et exprimer son inverse comme combinaison K-linéaire de I et A.
3. Considérer le Théorème de Cayley–Hamilton. On pourrait penser qu'il est possible d'utiliser l'argument $p_A(A) = \det(A \cdot I_n - A) = 0$ pour montrer le théorème. Montrer que ce raisonnement est faux.

Solution.

1. *On calcule le polynôme caractéristique de A, on trouve*

$$p_A(t) = \det(tI_3 - A) = t^3 - t^2 + 3.$$

Si on évalue p_A en A on trouve

$$\begin{aligned} p_A(A) = A^3 - A^2 + 3I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et donc le théorème est vérifié.

2. $\det(A) = p_A(0) = a_0 \neq 0$, *donc A est bien inversible. Par le théorème de Cayley–Hamilton on a $A^2 + a_1A + a_0I_2 = 0_2$. En appliquant A^{-1} à gauche on a $A + a_1I_2 + a_0A^{-1} = 0_2$, ce qui donne $A^{-1} = -(A + a_1I_2)/a_0$.*

3. *Soit R un anneau commutatif et $n > 1$. L'expression* $\det(A \cdot I_n - A)$ *ne peut pas être égale à l'évaluation du polynôme p_A en A, car la première est un élément de l'anneau R, tandis que la seconde est un élément de $R^{n\times n}$.*

Exercice 7. (*)

Soient K un corps, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ les valeurs propres d'une matrice $A \in K^{n\times n}$ et $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités algébriques. Soit $m_1 + \cdots + m_r = n$.

Définition: La *trace* de A est définie par $\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Démontrer les assertions suivantes:

i) $\det(A) = \prod_{i=1}^r \lambda_i^{m_i}$

ii) Si $p_A(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$, montrer que $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(A)$.

iii) $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^r m_i\lambda_i$

Solution. –