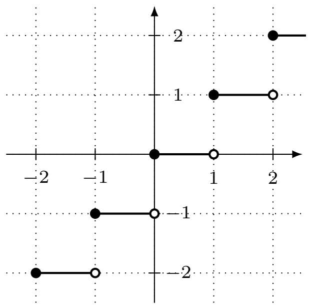
Exercice 1.

a) On a $D(f) = \mathbb{R}$. Le graphe de f est le suivant :

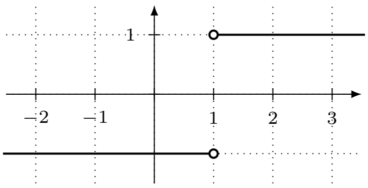


Pour $0 \leq x < 1$, on a $\lfloor x \rfloor = 0$, et pour $1 \leq x < 2$, on a $\lfloor x \rfloor = 1$. En définissant $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ et $y_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \lfloor 1 - \tfrac{1}{n+1} \rfloor = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \lfloor 1 + \tfrac{1}{n+1} \rfloor = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

On a deux suites (x_n) et (y_n) qui convergent vers 1, mais dont les images convergent vers des limites différentes. Par la proposition du cours qui fait le lien entre les suites convergentes et la convergence de fonctions, on déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas.

b) On a $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Le graphe de f est le suivant :



Pour $x < 1$, on a $\dfrac{|x-1|}{x-1} = -1$ (car le numérateur est positif, et le dénominateur négatif), et pour $1 < x$, on a $\dfrac{|x-1|}{x-1} = 1$. En définissant $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ et $y_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{|-\frac{1}{n+1}|}{-\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{1}{n+1}|}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Comme au point précédent, on déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas.

Exercice 2. Dans les deux cas, on utilise la "fameuse" inégalité : $-|x-a| \leq |x|-|a| \leq |x-a|$. Celle-ci découle de $|s+t| \leq |s|+|t|$: avec $s = x$ et $t = a-x$, on a $|a| \leq |x|+|a-x|$, soit $|a|-|x| \leq |a-x|$ ou encore $-|x-a| \leq |x|-|a|$; avec $s = a$ et $t = x-a$, on obtient de même $|x|-|a| \leq |x-a|$; on peut conclure $||x|-|a|| \leq |x-a|$.

a) Soit $\varepsilon > 0$, et $\delta = \varepsilon$. Alors si $|x-a| < \delta$, on a $||x|-|a|| \leq |x-a| < \delta = \varepsilon$, comme désiré pour obtenir $\lim\limits_{x\to a} |x| = |a|$.

b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers a, et soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe N tel que $|x_n - a| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$; grâce à la "fameuse" inégalité, on peut donc écrire $||x_n| - |a|| \leq |x-a| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Ceci montre que l'image par la fonction "valeur absolue" d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a est une suite $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $|a|$.

Exercice 3.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{-(x-1)(1+x+x^2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{-(x-1)(1+x+x^2)} = -\dfrac{3}{3} = -1$;

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{x-1}{1} = -1\,;$

c) $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-x}{x+2} = \frac{15}{5} = 3\,;$

d) $\lim_{x\to 1} \left|\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\right| = \lim_{x\to 1} \left|\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}\right| = \left|\frac{0}{2}\right| = 0\,;$

e) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{4}\,;$

f) $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\,;$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2+1-1} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+1}+1 = 2\,;$

h) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x+15}} = \frac{0}{1} = 0\,.$

i) $\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{x-a} = (3a^2)2\sqrt{a} = 6a^{5/2}\,.$

Exercice 4. Le point M a pour coordonnées $(a; a^2)$. Le milieu du segment est donc $(a/2; a^2/2)$ et l'équation de la droite passant par l'origine et M est $a^2x - ay = 0$. La pente de cette droite vaut $a^2/a = a$. La pente d'une droite orthogonale est donc $-1/a$ et l'équation de la perpendiculaire est de la forme $x + ay = c$. Comme le point milieu $(a/2; a^2/2)$ appartient à la perpendiculaire, $c = 1/2(a^3 + a)$. Lorsque $x = 0$, on voit que $y = 1/2(1 + a^2)$. La limite lorsque a tend vers zéro vaut $1/2$.

Exercice 5. Si f est définie au voisinage de a, alors il existe $\delta > 0$ tel que $]a-\delta; a+\delta[\subseteq D(f) \cup \{a\}$. En particulier, $([a; a+\delta[\setminus\{a\}) \subseteq (D(f) \cup \{a\}) \setminus \{a\}$, c'est-à-dire $]a; a+\delta[\subseteq D(f)$. De même, on a $]a-\delta; a[\subseteq D(f)$. On en conclut que f est définie à droite et à gauche de a, et les limites de la proposition sont bien définies.
Supposons $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Soit $\varepsilon > 0$; par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |x-a| < \delta$ implique $|f(x)-b| < \varepsilon$. En particulier, si $0 < x-a < \delta$, on a $|f(x)-b| < \varepsilon$; ceci implique $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$. De même, si $0 < a-x < \delta$, on a $|f(x)-b| < \varepsilon$, et conséquemment $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$.
Supposons maintenant que $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$. Soit $\varepsilon > 0$; par hypothèse, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $0 < a-x < \delta_1$ implique $|f(x)-b| < \varepsilon$, et il existe aussi $\delta_2 > 0$ tel que $0 < x-a < \delta_2$ implique $|f(x)-b| < \varepsilon$. On a donc pour $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ que si $0 < |x-a| < \delta$, alors soit $0 < a-x < \delta \leq \delta_1$, soit $0 < x-a < \delta \leq \delta_2$, et dans les deux cas, $|f(x)-b| < \varepsilon$. On a bien trouvé δ tel que $0 < |x-a| < \delta$ implique $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Exercice 6. En remplaçant $+\infty$ partout par $-\infty$ dans la Proposition suivante, celle-ci reste valable :

> **Proposition.** La fonction f, définie "au voisinage de $+\infty$" (*i.e.* il existe $N \in \mathbb{R}$ avec $]N; +\infty[\subseteq D(f)$), admet $b \in \mathbb{R}$ pour limite lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si l'image par f de toute suite de $D(f)$ qui tend vers $+\infty$ est une suite qui tend vers b. En particulier, si b et b' sont deux limites de f lorsque x tend vers $+\infty$, alors $b = b'$.

En remplaçant $+\infty$ partout par $-\infty$ dans la Proposition suivante, celle-ci reste valable. De même, on peut remplacer $a \in \mathbb{R}$ par $+\infty$ partout, ou par $-\infty$ partout et la Proposition reste valable :

> **Proposition.** La fonction f, définie au voisinage de a, tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si et seulement si l'image par f de toute suite de $D(f) \setminus \{a\}$ qui tend vers a est une suite qui tend vers $+\infty$.

(L'unicité de la limite n'est pas pertinente dans ce dernier cas.)

Notons que toutes les versions de ces propositions peuvent se démontrer comme la Proposition d'origine.

Exercice 7. Rappelons que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ veut dire que pour tout nombre réel $C > 0$, il existe un nombre $\delta_f > 0$ tel que si $0 < |x-a| < \delta_f$, alors $f(x) > C$. De même, $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ veut dire que pour tout nombre réel $C > 0$, il existe un nombre $\delta_g > 0$ tel que si $0 < |x-a| < \delta_g$, alors $f(x) > C$.

a) Soit $C > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta_f > 0$ et $\delta_g > 0$ tels que $f(x) > \frac{C}{2}$ et $g(x) > \frac{C}{2}$ pour tout x avec $0 < |x-a| < \min\{\delta_f; \delta_g\}$. Pour $\delta := \min\{\delta_f; \delta_g\}$, on a donc

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) > \tfrac{C}{2} + \tfrac{C}{2} = C$$

si $0 < |x-a| < \delta$. Ceci démontre que $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty$. De manière beaucoup plus informelle, on pourra désormais écrire $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = +\infty + \infty = +\infty$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta_f > 0$ tel que $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$ pour tout x avec $0 < |x-a| < \delta_f$. On a donc

$$\left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| = \frac{1}{f(x)} < \varepsilon$$

si $0 < |x-a| < \delta_f$. Ceci démontre l'affirmation. De manière beaucoup plus informelle, on pourra désormais écrire $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$;

c) Soit $C > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta_f > 0$ et $\delta_g > 0$ tels que $f(x) > \sqrt{C}$ et $g(x) > \sqrt{C}$ pour tout x avec $0 < |x-a| < \min\{\delta_f; \delta_g\}$. Pour $\delta := \min\{\delta_f; \delta_g\}$, on a donc

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) > \sqrt{C} \cdot \sqrt{C} = C$$

si $0 < |x-a| < \delta$. Ceci démontre que $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = +\infty$. De manière beaucoup plus informelle, on pourra désormais écrire $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$.

Exercice 8. On a $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, cette fonction admet donc une asymptote verticale (à droite et à gauche) en $x = 0$.

Exercice 9.

a) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} + \lim_{x\to 1} \frac{2}{x} = +\infty + 2 = +\infty$;

b) $\lim_{x\to 3^+} \left(x^2 + 3x + 4 + \frac{1}{x-3}\right) = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)(x^2+3x+4)+1}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^3+3x^2+4x-3x^2-9x-12+1}{x-3} =$ $\lim_{x\to 3^+} \frac{x^3-5x-11}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$;

c) $\lim_{x\to\infty} \left(3x^2 - x + 3\right) = +\infty$;

d) $\lim_{x\to 1} \left|\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}\right| = \lim_{x\to 1} \left|\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}\right| = +\infty$.

Exercice 10. Comme $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$ par un exercice précédent. Par le changement de variable $t = -x$, on a aussi $\lim_{x\to-\infty} 1/x = \lim_{t\to+\infty} 1/(-t) = -\lim_{t\to+\infty} 1/t = 0$. Ces deux remarques nous permettent d'effectuer les calculs suivants.

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x}{3x^2-5x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1-3/x}{3-5/x+1/x^2} = \frac{1}{3}$;

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{x-3+2/x} = 0$;

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^4-3x^2+2}{x^3-27} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^4} \cdot \frac{6-3/x^2+2/x^4}{1/x-27/x^4} = +\infty$;

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{9x+7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{3-2/x}{9+7/x} = \frac{1}{3}$.

Exercice 11. Les solutions sont $x_1 = \frac{-3+\sqrt{9-4a}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-3-\sqrt{9-4a}}{2a}$.

$\lim_{a\to 0} \frac{-3+\sqrt{9-4a}}{2a} = \lim_{a\to 0} \frac{-3+\sqrt{9-4a}}{2a} \cdot \frac{-3-\sqrt{9-4a}}{-3-\sqrt{9-4a}} = \lim_{a\to 0} \frac{9-9+4a}{2a(-3-\sqrt{9-4a})} = \lim_{a\to 0} \frac{2}{(-3-\sqrt{9-4a})} = -\frac{1}{3}$.

Un calcul similaire montre que $\lim_{a\to 0} x_2$ n'existe pas (on a en fait $\lim_{a\to 0^-} x_2 = +\infty$ et $\lim_{a\to 0^+} x_2 = -\infty$).

Exercice 12.

a) Faux. La fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est définie en 0 mais pas au voisinage de 0.

b) Faux. La fonction $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{-x}$ est définie en 0 mais pas à droite de 0.

c) Vrai. En effet, si la fonction $f : D(f) \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de a alors il existe $\delta > 0$ tel que $]a-\delta; a+\delta[\subset D(f) \cup \{a\}$ et donc en particulier pour ce même δ on a $]a-\delta; a[\subset D(f)$ ce qui signifie, par définition, que f est définie à gauche de a.

d) Faux. La fonction $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ est définie au voisinage de 0 mais pas en 0.

e) Faux. La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ n'admet pas d'asymptote verticale en$x = 0$.

f) Faux. La fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ admet une asymptote verticale en $x = 0$, mais est aussi définie en $x = 0$.

g) Faux. Les fonctions $f(x) = 2x$ et $g(x) = x$ sont telles que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ mais on a $f/g = 2$.

h) Faux. La fonction $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$ est telle que les suites $(f(1/n))$ et $(f(-1/n))$ tendent vers 0 (elles sont identiquement nulles) mais pourtant la fonction f ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0. Il faut que *toutes* les suites (x_n) qui tendent vers zéro satisfassent $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ et pas seulement deux suites.

i) Faux. Par exemple, si $f(x) = \cos(2\pi x)$, la suite $(f(n))$ est la suite de valeur constante 1 (et de limite 1), mais la suite $(x_n) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)$ tend vers $+\infty$ et est telle que $(f(x_n))$ est la suite de valeur constante -1. Toutes les images par f de suites qui tendent vers $+\infty$ ne tendent pas vers la même valeur, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe donc pas. Ce constat explique pourquoi on ne peut pas appliquer directement aux fonctions rationnelles le résultat sur les limites de suites rationnelles (même si la preuve du résultat pour les fonctions est très semblable).

Exercice 13.

a) $\lim\limits_{x\to\pi/2^+} \tan(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2^+} \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \lim\limits_{x\to\pi/2^+} \dfrac{1}{\cos(x)} = -\infty$,

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ en faisant le changement de variable $x = \tan(y)$,

c) $\lim\limits_{x\to\pi/2^-} \tan(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2^-} \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \lim\limits_{x\to\pi/2^-} \dfrac{1}{\cos(x)} = +\infty$,

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ en faisant le chagement de variable $x = \tan(y)$, ainsi la fonction $\tan(x)$ admet une asymptote verticale en $x = \pi/2$ et la fonction $\arctan(x)$ admet deux asymptotes horizontales, une en $y = \pi/2$ et l'autre en $y = -\pi/2$

Exercice 14. Soient les suites de terme général $a_n = \pi/2 + n\pi$ et $b_n = 2n\pi$ ces deux suites tendent vers l'infini mais pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\cos(a_n) = 0$ et $\cos(b_n) = 1$. Les valeurs des limites de $\cos(x)$ sont différentes pour deux suites tendant vers l'infini : la limite à l'infini de la fonction $\cos(x)$ n'existe donc pas.