Série 26

Exercice 1. Utilise le théorème des 2 gendarmes pour trouver les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

b) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \left(\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x} \right\rfloor \right)$

Exercice 2.

a) Soit $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$ une fonction rationnelle (avec $a_n \neq 0 \neq b_m$). Démontre (enfin !) que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m, \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m, \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \cdot (-1)^{n-m} \cdot \infty & \text{si } n > m, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m, \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m, \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \cdot \infty & \text{si } n > m, \end{cases}$$

(où $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction "signe" qui envoie x sur -1 si $x < 0$, 0 si $x = 0$, et 1 si $x > 0$).

b) Lors de l'étude des fonctions rationnelles, nous avons vu qu'une telle fonction donnée par $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ possède une asymptote oblique $y = px + o$ (avec $p, o \in \mathbb{R}$) si le quotient de la division polynomiale de $a(x)$ par $b(x)$ est $q(x) = px + o$. Démontre que cette définition "au sens des fonctions rationnelles" correspond bien à la définition d'asymptote oblique (donnée au cours sous forme d'une limite).

Exercice 3. Comment faut-il choisir les quatre nombres réels a, b, c et d pour que la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$$

passe par le point $(2; -2)$ et admette pour asymptotes les droites d'équation $x = -3$ et $y = -2x + 1$?

Exercice 4. Comment faut-il choisir les cinq nombres réels a, b, c, d et e pour que la fonction rationnelle

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x + d)(x + e)}$$

passe par le point $(-5; 20)$ et admette pour asymptotes les droites d'équation $x = -2$, $x = 1$ et $y = 3x - 7$?

Exercice 5. Détermine le domaine de définition, les asymptotes et la parité des fonctions f, g, h et i données comme suit.

a) $f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}$;

b) $g(x) = \sqrt{4x^2 + 3} - \sqrt{(4x + 1)(x + 4)}$;

c) $h(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$;

d) $i(x) = x\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

Exercice 6. On considère une fonction $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Donne l'ensemble de définition de f.

b) Montre que f se comporte asymptotiquement comme g donnée par $g(x) = \left|\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right|$.

c) Détermine la position de $f(x)$ par rapport à ses asymptotes et propose une esquisse de f dans chacun des cas que tu traites.

Remarque. Cet exercice permet d'avoir une meilleure intuition pour le comportement des fonctions du type de l'exercice précédent.

Exercice 7. On désire calculer

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\sin(t)}{t} - 1 \right)$$

qui, sous cette forme, donne l'expression indéterminée "$\infty \cdot 0$".

a) Montre que $\cos(t) \leq \frac{\sin(t)}{t} \leq 1$ si $t \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Déduis-en que $\frac{\cos(t)-1}{t} \geq \frac{1}{t}\left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) \geq 0$ si $t \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, et

$\frac{\cos(t)-1}{t} \leq \frac{1}{t}\left(\frac{\sin(t)}{t} - 1\right) \leq 0$ si $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

c) En t'aidant d'une amplification adéquate, donne la valeur de la limite cherchée.

Exercice 8. Détermine le domaine de définition, les coordonnées d'éventuels "trous", les asymptotes, ainsi que la parité de chacune des fonctions a à d données comme suit.

a) $a(x) = x + \frac{\sin(x)}{x}$;

b) $b(x) = x + \sin(x)$;

c) $c(x) = 10x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$;

d) $d(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.